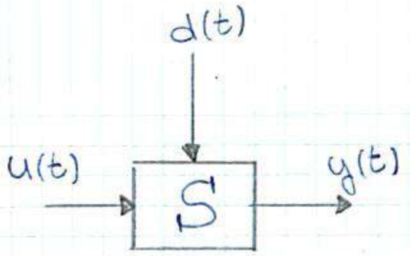
17/9/18




u(t) ingressi
y(t) uscite
d(t) disturbi

- studio le proprietà matematiche del sys per capirne il comportamento fisico
- u(t) quantità fisiche con le quali posso agire sul sys facendolo evolvere nel tempo
- y(t) quantità fisiche di cui mi interessa il funzionamento
- d(t) azioni che il resto dell'universo esercitano sul sys indipendenti, solitamente, dal nostro volere

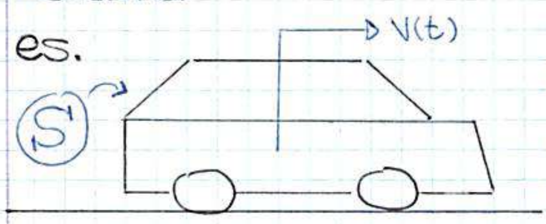
Regolare quel sistema significa applicare un controllo (u(t)) che gli permetta di fare quello (y(t)) che voglio io per la maggior parte del tempo.

RISPOSTA TRANSITORIA DEL SISTEMA

- stabilità, controllo sys retroazionati
- precisione, faccia quello che voglio io
- reiezione, faccia quello che voglio io con disturbi
- robustezza, faccia quello che voglio io in presenza di disturbi

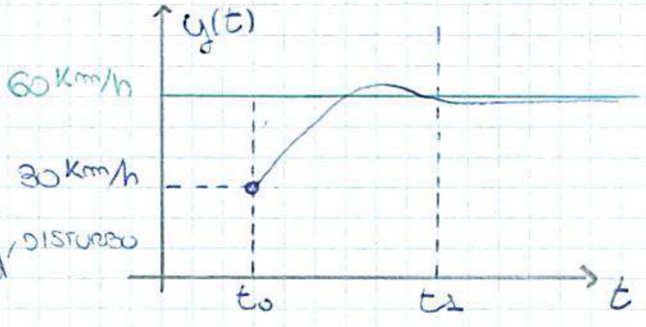
PROB. CHE AFFRONTO NEL SYS

es.



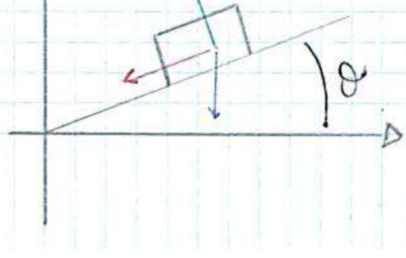

CRUIS CONTROL:
voglio settare la velocità di crociera della macchina ad una velocità costante

$y_R(t)$ uscita desiderata




(m) modello del sistema

$$m \cdot a = \underset{\text{ATTRITO}}{f_A} + \underset{\text{CONTROLLO}}{f_C} + \underset{\text{DISTURBO}}{f_d}$$



$$\boxed{m \cdot a = f_A + f_C + f_d}$$

$\ominus K_v V$ $\qquad u(t) \qquad$ $mg\,sen\,\vartheta$ - $d(t)$

l'energia del sys deve essere dissipata

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \triangleq \frac{dy(t)}{dt}$$

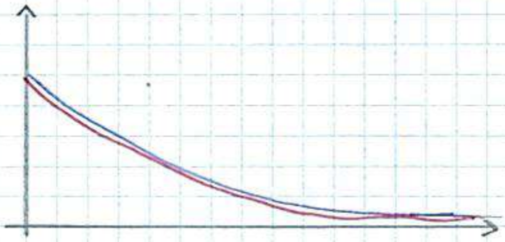
$$m\dot{y}(t) - K_v y(t) = u(t) + d(t)$$

$$\boxed{\dot{y}(t) + \frac{K_v}{m} y(t) = \frac{1}{m} u(t) + \frac{1}{m} d(t)}$$

modello matematico che descrive il funzionamento fisico del mio sistema

m

$$u(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$$



es.
"metto la macchina in folle senza accelerare più"

PROCESSO DI IDENTIFICAZIONE DEL SISTEMA → attribuire al sys un modello per la classe appropriato, trovo i parametri che corrispondono al comportamento reale del sys

$$u(t) \longrightarrow \boxed{m} \longrightarrow y_m(t)$$

$u(t)=0$ nel caso dell'esempio

I parametri devono darmi delle risposte (linea rossa) comparabili con il comportamento reale (linea blu)

PROGETTAZIONE → modelli aggregati

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b(t)$$
$$y(t) = c x(t)$$

$D=0$ non ha azione diretta sul sistema di controllo

$$a = -\frac{K_v}{m} \quad b = \frac{1}{m} \quad c = 1$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{K_v}{m}}}$$

fne di trasferimento

18/9/18

$u(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$

funzione di trasferimento

modello da cui identifico i coeff. da inserire nell'eq. di stato

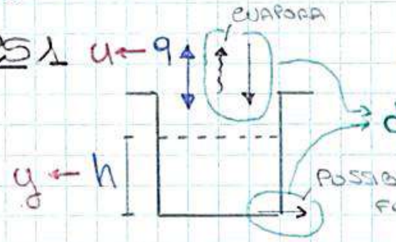
$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$

- sistemi lin., tempo invar. regolabili con equazioni:

$$S: \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\underline{x}(t) \end{cases}$$

S è descritto da questa equazione

es 1




q portata d'acqua che immetto o faccio uscire

A = sezione vasca = costante

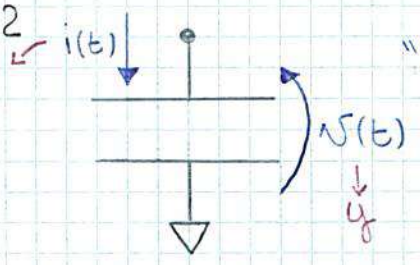
V = volume acqua = $A \cdot h$

$[q] = \frac{[L^2]}{[sec]}$

VARIAZIONE volume

$$\frac{d}{dt}V_{(t)} = q(t) \Rightarrow A \cdot \frac{dh}{dt} = q(t) \Rightarrow \boxed{\dot{y}(t) = \frac{1}{A}u(t)}$$

es. 2

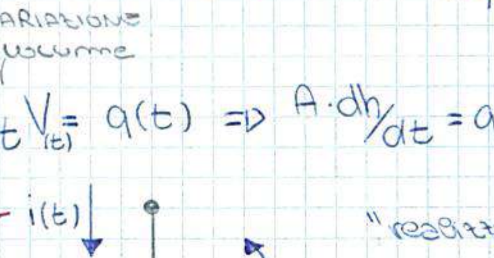



"realizzare una capacità e studiarne il comportamento"

$$C\frac{dv(t)}{dt} = i(t) \Rightarrow \boxed{\dot{y}(t) = \frac{1}{C}u(t)}$$

I 2 sistemi condividono lo stesso modello, le leggi di controllo che li regola devono essere uguali, non le implemento nello stesso modo ma l'eq. matematica è la stessa.

es. 3




$q = \alpha V_c(t)$

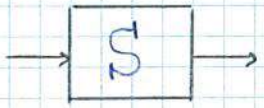
$\dot{x}_1(t) = C_1 u(t)$

$\dot{x}_2(t) = C_2 u(t)$

(ORDINE SYS 2, 2 VAR. DI STATO)

$$P = [B \ AB \cdots A^n B] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{non raggiungibile}$$

non posso soddisfare la richiesta usando un solo attuatore




SISTEMI LINEARI VS SISTEMI NON LINEARI

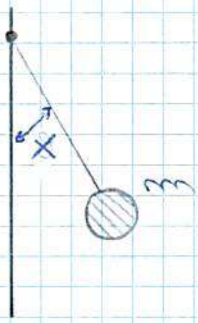
- non esiste un modello matematico che possa descrivere un sistema fisico in modo unico

$\lim_{t \to +\infty} y(t)$ } def. rigorosa di $t_{inv.}$

nella pratica significa t molto grande, non necessariamente +inf

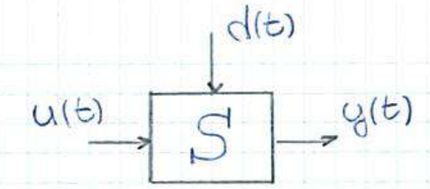
es. cuscinetto macchina < 31 agosto $\mu_{D1}$ / 11 gennaio $\mu_{D2}$ $\quad \mu_{D1} \neq \mu_{D2}$ t. variante

31 → 11 in questo esempio è il nostro $t \to \infty$
AGO GENN.




$\ddot{x} + K \operatorname{sen} x = 0$

se $x \geq 10/15°$ l'eq. da problemi



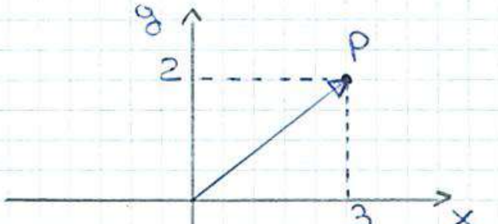

19/9/18

- ALGEBRA E TEORIA DEI SISTEMI
- PROBLEMA DEL CONTROLLO / REGOLAZIONE IN <u>CICLO CHIUSO</u> (RETROAZIONE
- ANALISI DELLA RISPOSTA DI SISTEMI LTI
- ANALISI DELLA <u>RISPOSTA IN FREQUENZA</u>

① - ANALISI DELLA STABILITÀ PER SISTEMI RETROAZIONATI
  - CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST
  - METODO DEL LUOGO DELLE RADICI

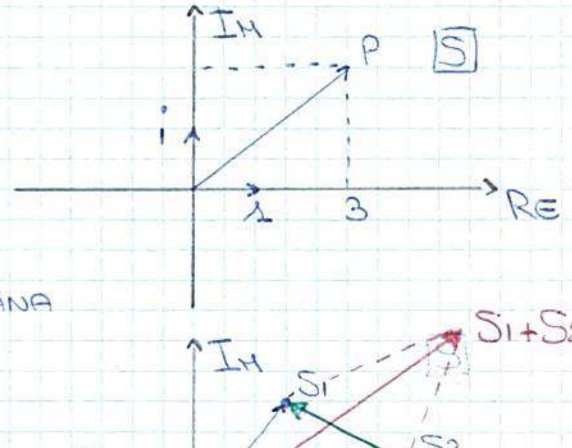
② - ANALISI DELLA PRECISIONE
③ - ANALISI DELLA REIEZIONE DEI DISTURBI
④ - ANALISI DELLA ROBUSTEZZA
- ANALISI DELLE PRESTAZIONI IN CICLO CHIUSO
  ↳ CENNI ALLA SINTESI DI REGOLATORI

## RICHIAMI DI ALGEBRA




i è un operatore che fa cambiare di 90° sul piano x, y

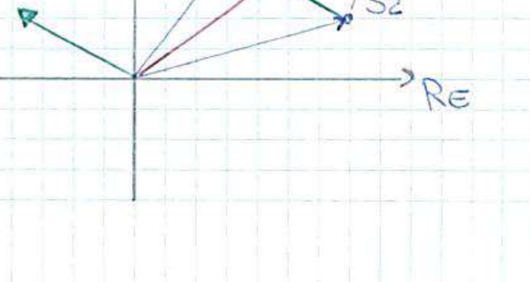
$i \cdot i = i^2 = -1$




$P = re \cdot 1 + im \cdot i$

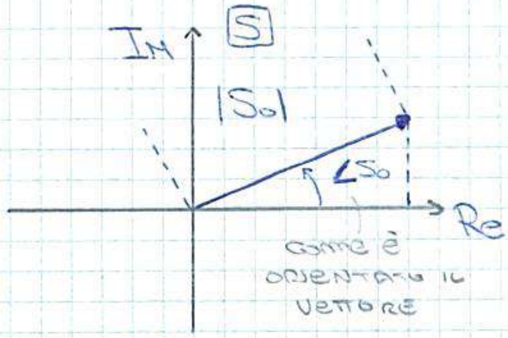
$\boxed{S_1 = a_1 + i b_1}$ — FORMA CARTESIANA

$S_2 = a_2 + i b_2$




$S_1 + S_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

$S_1 - S_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$




$|S_0| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\angle S_0$ = fase del num. complesso

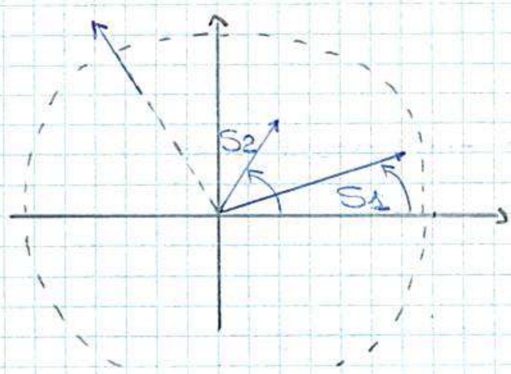
$\angle S_0 \in [-\pi, \pi)$

$S_0 = |S_0| \left[ \cos \angle S_0 + j \operatorname{sen} \angle S_0 \right]$

$\boxed{S_0 \stackrel{!}{=} |S_0| e^{j \angle S_0}}$ — FORMA POLARE — più comoda per fare prodotti e rapporti tra vettori

$\boxed{\angle S_0 = \operatorname{atan} \frac{b}{a}}$ PRENDENDO a e b con il loro segno $S = a + ib$

ATAN ESTESA AI 4 QUADRANTI



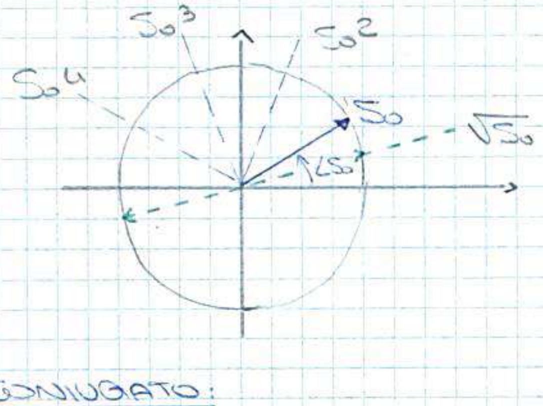

PRODOTTO:

$S_1 \cdot S_2 = |S_1| \cdot e^{j \angle S_1} \cdot |S_2| e^{j \angle S_2}$

$\stackrel{!}{=} |S_1||S_2| e^{j(\angle S_1 + \angle S_2)}$

RAPPORTO:

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|S_1|}{|S_2|} e^{j(\angle S_1 - \angle S_2)}$

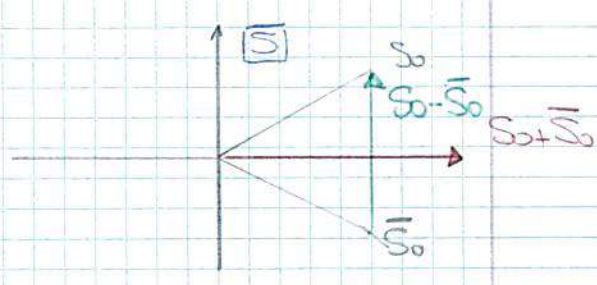



POTENZA
e
RADICE

CONIUGATO:

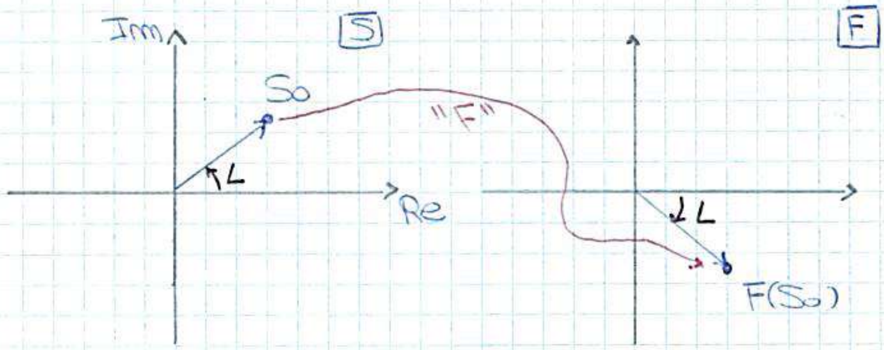
$S = a + jb \quad \angle S = \operatorname{atan} b/a$

$\bar{S} = a - jb \quad \angle \bar{S} = \operatorname{atan} -b/a$



FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

$F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$




24/9/18

FUNZIONI RAZIONALI

$F(S) = \dfrac{N(S)}{D(S)}$  N(S), D(S) sono polinomici

es.

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$  $F(S) = \dfrac{1}{1+S}$  sono lo stesso oggetto

una fnc di trasferimento è una funzione razionale

$* \boxed{P(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$  $a_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 0 \div n$

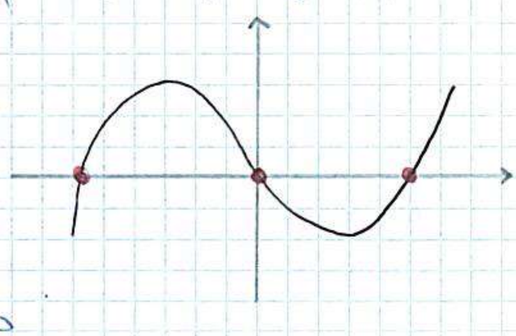
Se $a_n = 1 \Rightarrow P(S)$ è MONICO

dividendo tutti i coeff. per $a_n$ trasformo tutti i polinomi in MONICO

$\rho[P(S)] = n$  grado di polinomio

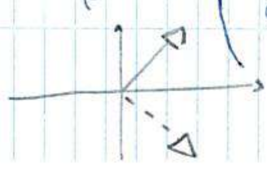
Un polinomio di grado n a coeff. reali ha esattamente n radici  $S_1 \dots S_n$

$P(S_i) = 0 \quad \forall i = 1 \div n$



la radice è quel valore che fa valere zero il vettore nel grafico di F(So) ossia la sua immagine

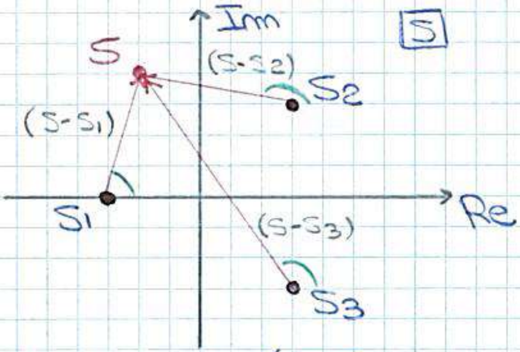
$S_1 \dots S_n$ sono o reali (Im=0) o complessi (devono avere un gemello con parte immaginaria opposta)



Se $P(s)$ è monico ($a_n = 1$)

$* \iff \boxed{P(s) = (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$ espressione fattorizzata rispetto alle radici

prodotto di n termini




$$P(s) = |s-s_1| e^{j\angle s-s_1} \cdot |s-s_2| e^{j\angle s-s_2} \cdot |s-s_3| e^{j\angle s-s_3}$$

$$\cdots \cdot |s-s_n| e^{j\angle s-s_n}$$

RAPPRESENTAZIONE IN FORMA POLARE

PRODUTTORIA

$$\boxed{P(s) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} |s-s_i|}_{|P(s)|} \, e^{j \underbrace{\sum_i^n \angle s-s_i}_{\angle P(s)}}}$$

OSS

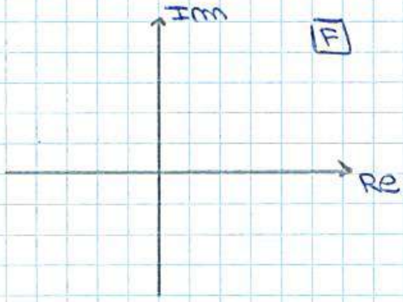
Se $a_n \neq 1$ (non monico)

$$\boxed{P(s) = a_n (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$ FORMA FATTORIZZATA

$$\boxed{P(s) = |a_n| \prod_i |s-s_i| e^{j[\angle a_n + \sum_i^n \angle s-s_i}}$$ FORMA POLARE

GRADO

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \begin{array}{l} \partial[N(s)] = m \to \text{n° di volte in cui il numeratore si annulla} \\ \partial[D(s)] = n \to \text{n° di volte in cui il modulo va ad infinito} \end{array}$$




Grado relat. di una fne razionale:

$$\rho[F(s)] = \partial[D(s)] - \partial[N(s)]$$

eccesso di grado del numeratore rispetto al denominatore

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0$$

$$D(s) = s^n + a s^{n-1} \cdots a_0$$

Radici di $N(S) = \beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$

Radici di $D(S) = \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$

$$F(S) = b_m \frac{\left|\prod_{1}^{m}{}_i\right| (S-\beta_i)}{\prod_{1}^{m}{}_i (S-\alpha_i)}$$

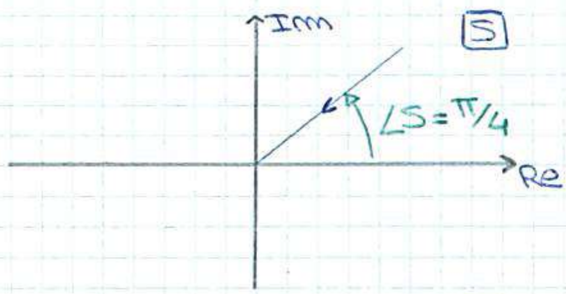
$$= |b_m| \frac{\prod_{1}^{m}{}_i |S-\beta_i|}{\prod_{1}^{m}{}_i |S-\alpha_i|} \cdot e^{j\left[b_m + \sum_{1}^{m}{}_i \angle s-\beta_i - \sum_{1}^{m}{}_i \angle s-\alpha_i\right]}$$

OSS

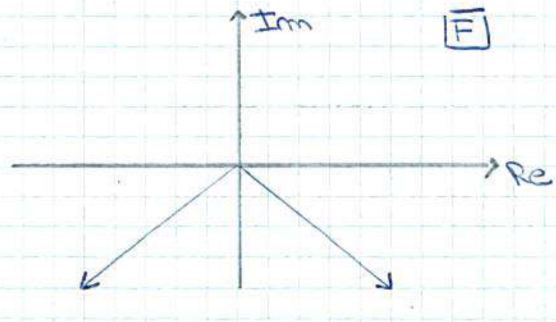
$F(S) = \frac{1}{S}$ cosa succede quando $S \to 0$?

- va all'∞ ma non so se positivo o negativo

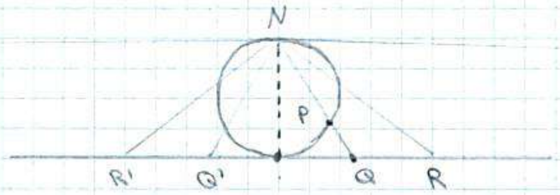

nel dominio reale




mando a zero S lungo questa direzione




nel piano complesso non ho ± ∞ ma solo un infinito



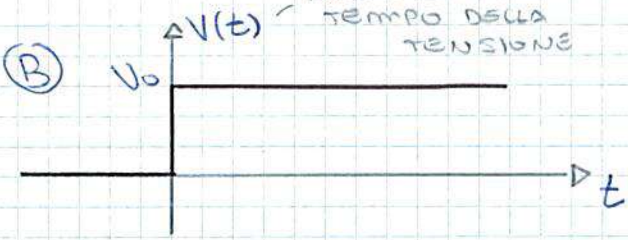

AD OGNI SEMIRETTA CORRISPONDE UNA CIRCONF. DI RAGGIO SEMPRE + GRANDE

Ⓐ

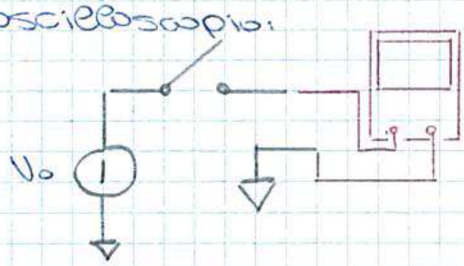
$F(S) = \frac{1}{S}$

Ⓑ

ANDAMENTO NEL TEMPO DELLA TENSIONE




oscilloscopio:



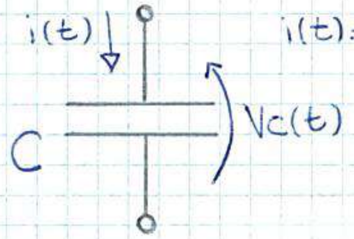

$$\boxed{V(t) = V_0 \cdot 1(t)}$$ segnale fisico

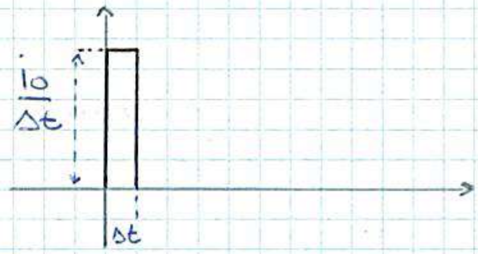
TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\boxed{V(S) = \int_{0^-}^{\infty} v(t) e^{-st} dt = V_0 \cdot \frac{1}{S}}$$

Ⓒ

$i(t) = i_0 \, \delta(t)$



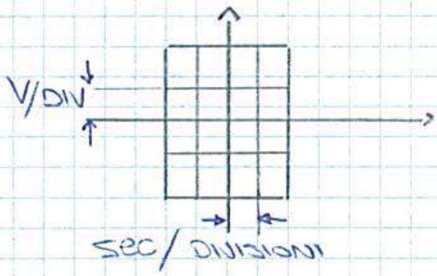



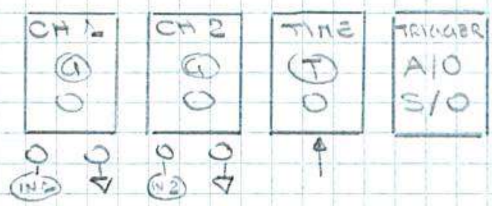

$$\boxed{V_C(S) = \frac{1}{CS} I(S)}$$

$\frac{1}{S}$ INDICA LA PROPRIETÀ DI STABILITÀ

RISPOSTA DEL SYS AL GRADINO $V_C(S) = \frac{1}{CS^2}$ → non dicono nulla sulla stabilità del sistema

- oscilloscopio



**OSS** $F(S) = \dfrac{N(S)}{D(S)}$ se hanno una radice in comune semplifico e cede il grado
(non si cancellano!)

$N(S), D(S)$ sono PRIMI tra loro se non hanno radici in comune

## CENNI TEORIA DEI SISTEMI

$$u(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$$

$$S: \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\underline{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$ FORMA DI STATO DEL SISTEMA

$$S: \quad sX(S) - \overbrace{\underline{x}(0^-)}^{\text{VETTORE DA CUI INIZIA LA STORIA}} = AX(S) + BU(S)$$

$$(SI - A)X(S) = \underline{x}(0^-) + BU(S)$$

DETERMINANTE
$|SI - A| = 0$ $\quad \varphi_A(S)$ pol. caratt. della matrice A
$$\varphi_A(S) = S^m + a_{m-1}S^{m-1} + \ldots + a_0$$

$$X(S) = \underbrace{(SI-A)^{-1}\underline{x}(0^-)}_{\text{RISPOSTA LIBERA DELLO STATO}} + \underbrace{(SI-A)^{-1}BU(S)}_{\text{RISPOSTA FORZATA DELLO STATO}}$$

NON DIPENDE DAL NOSTRO VOLERE

SOSTITUISCO

$$y(S) = CX(S) + DU(S)$$

$$= \underbrace{C(SI-A)^{-1}\underline{x}(0^-)}_{\text{RISPOSTA LIBERA DELL'USCITA}} + \underbrace{\overbrace{C(SI-A)^{-1}BU(S)}^{\text{fnz razionale a grado relativo almeno 1}} + DU(S)}_{\text{RISPOSTA LIBERA DELL'USCITA}}$$

fnz razionale a grado relativo almeno 0

STA

$$T(S) = C(SI-A)^{-1}B + D = \frac{N_T(S)}{D_T(S)}$$ se $D \neq 0$ $\rho[T(S)] = 0$

S CAUSALE E SEMPLICEMENTE PROPRIO

se $D=0$ $\rho[T(S)] \geq 1$ $S$ CAUSALE, <u>STRETTAMENTE PROPRIO</u>

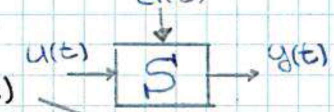
se $D\neq 0$ $\rho[T(S)] = 0$ $S$ CAUSALE, <u>SEMPLICEMENTE PROPRIO</u>

se $(SI-A)^{-1}\underline{x}(0^-)$:

1) SI ANNULLA → ASINTOTICAMENTE STABILE
2) LIMITATA → SEMPLICEMENTE STABILE
3) ALTRI CASI → INSTABILE

se $N_T$ e $D_T$ sono primi tra loro $D_T$ si abbassa di grado

25/9/18




$$S: \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t) + B_d d(t) \\ y(t) = C\underline{x}(t) + Du(t) + D_d d(t) \end{cases}$$

Rumore

R.F. → Ho applicato princ. sovrapposizione

$$S: \begin{cases} X(S) = (SI-A)^{-1}\underline{x}(0^-) + (SI-A)^{-1}BU(S) \\ Y(S) = C(SI-A)^{-1}\underline{x}(0^-) + \underbrace{[C(SI-A)^{-1}B + D]}_{T(S)}U(S) \end{cases}$$

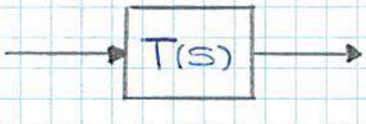
R.L.

$T(S)$ ← scalare per 1 ingresso 1 uscita

$\varphi_A(S) = (S-S_1)(S-S_2)\dots(S-S_n)$

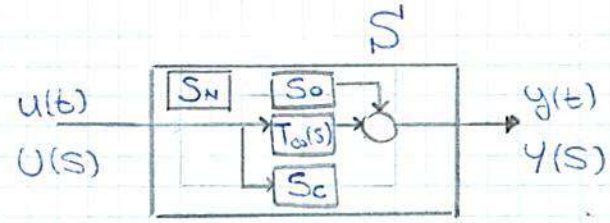
$T(S) = \dfrac{N_T(S)}{D_T(S)}$ ← guardo cosa ho qui dentro

se è uguale a $\varphi_A(S)$ non perdo proprietà di CONTROLL. e OSSERV.




Può essere:

- compl. controll. e osservabile
- se $S$ non è compl. controll. deve esse <u>STABILIZZABILE</u> ↑ Tutti i poli A parte Re<0
- se $S$ non è compl. osservabile. deve esse <u>RILEVABILE</u> ↓ Gli autovalori assoc. alla parte non osserv. del sys hanno tutti parte Re<0



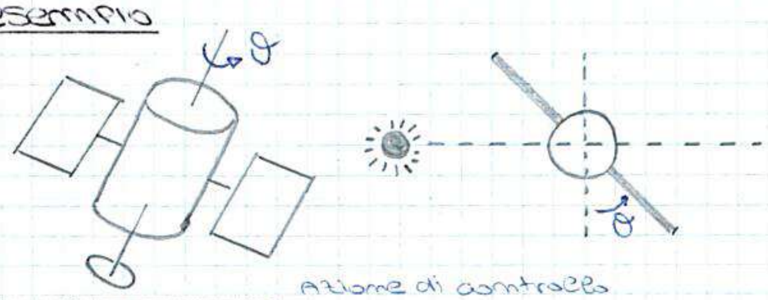

Sc → poli contr e non osservabili

So → poli osserv e non controll.

Se in So e SN ci sono poli con parte Re<0 → STABILIZZABILE

lo stato associato ad essi avrà evoluzione dello stato limitata

<u>esempio</u>




θ va mantenuto = 0 perché i pannelli assorbano al meglio em. solare

azione di controllo

$$\boxed{J_S \ddot{\theta} = T}$$ II LEGGE NEWTON

momento inerzia satellite

rotazione angolare

DISTURBO → $J_S \ddot{\theta} = T + T_d$

$$\boxed{J_R \dot{\omega} = -T}$$ III LEGGE NEWTON

REACTION momento inerzia ruota

accelerazione angolare ruota

$\underbrace{J_S \dot{\theta}}_{\text{momento angolare satellite}} \triangleq x_1(t)$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$

$\underbrace{J_S \omega}_{\text{momento angolare ruota}} \triangleq x_2(t)$

$P = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ← sys non complet. controll.

$T \triangleq u(t)$

$T_d \triangleq d(t)$

Scrivo le equaz. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + d(t) \\ \dot{x}_2(t) = -u(t) \end{cases}$

$\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) = d(t)$

$\dot{z}(t) = d(t)$

quindi non subisce spostamenti? Si, ci sono i **DISTURBI**

$\dot{x}_1(t) = u(t) + d(t)$

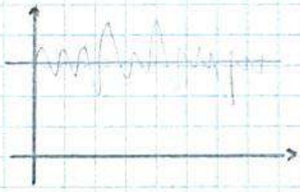
$\underbrace{\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)}_{\dot{z}(t)} = 0 \rightarrow \dot{z}(t) = 0$

$\dot{z}(t)$ momento angolare totale del sistema

il mom. tot. della struttura non è controllabile in nessun modo, l'autovalore associato è zero

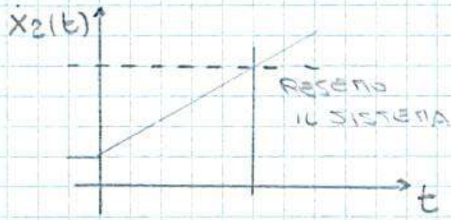
$$\cancel{\dot{x}_1(t)} + \boxed{\dot{x}_2(t) = d(t)}$$

SEGNALE A VALOR MEDIO NULLO



$$\boxed{d(t) = d_0 \cdot 1(t)} + \underbrace{n(t)}_{\text{ALTRI DISTURBI}}$$

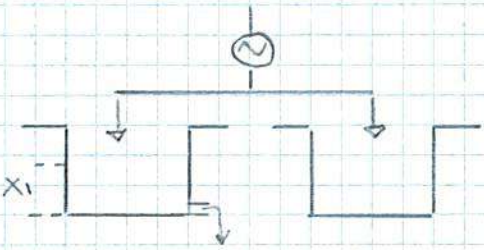
$$x_2(t) = x_2(0^-) + d_0\, t \cdot 1(t)$$




RESETTO IL SISTEMA

ACCENDO I RAZZI PER RIPORTARLO IN POSIZIONE

esempio vasche:



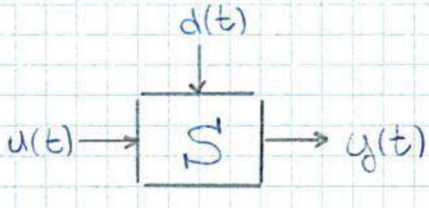

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

cambio la struttura del sistema ("faccio 1 buco")

CIRCA

$$\dot{x}_1 = -\gamma\sqrt{x} \longrightarrow \dot{x}_1 = -\lambda x_1$$

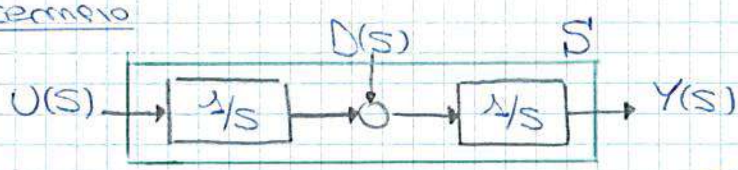
$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$ ora è compl. controllabile




$$Y(s) = T(s)U(s) + \underbrace{T_D(s)}_{} D(s)$$

PUÒ CONTENERE POLI DI OGNI TIPO ($Re = 0$, $Re > 0$) MA NECESSARIAMENTE PRESENTI IN $T(s)$

esempio

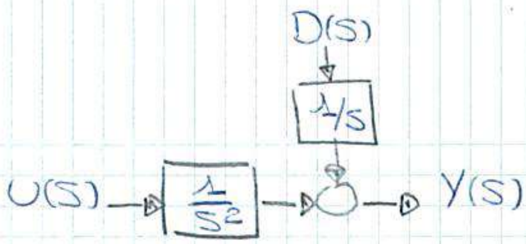



sistema di ordine 2

2 poli compl. controll. da U

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{T(s)} U(s) + \underbrace{\frac{1}{s}}_{T_D(s)} D(s)$$

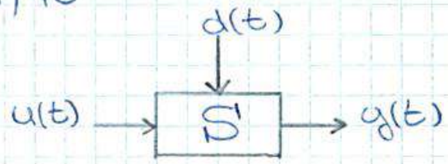
$T_D(s) \rightarrow$ polo in 0 presente anche in $T(s)$



sistema di ordine 3
2 poli controll. da u
1 no

$$Y(S) = \frac{1}{S^2} U(S) + \frac{1}{S} D(S)$$

26/9/18



$$Y(S) = T(S)U(S) + T_D(S)D(S)$$

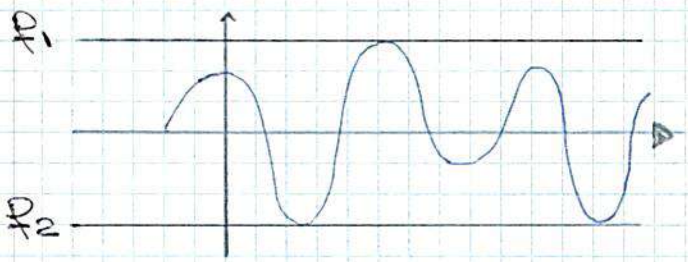
Vogliamo rendere asintoticamente stabili tutti i sistemi attraverso il controllo

$$\varphi_A(S) = |SI - A|$$

OSS

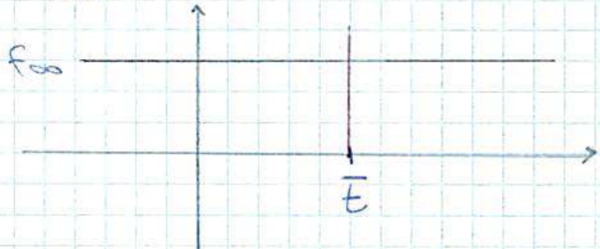
Cosa vuol dire essere limitato? E ammettere limite?

$f(t)$ è limitato → ha dei limiti, un valore sotto cui la fne non va mai ed un sup. sopra cui non va mai



$$f_1 \leq f(t) \leq f_2$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = f_\infty \in \mathbb{R}$$



$\bar{t}$ = dopo un po' di tempo posso trovare sempre una $\bar{t}$

per $\forall \, \varepsilon \; \exists$ un $\bar{t}$ tale per cui $f(t) - f_\infty$

$sen(\omega_0 t)$ è una fne limitata che non ammette limite per $t(0)$.

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\omega_0}{S^2 + \omega_0^2}$$