MATTEO WELI - FORMULARIO DI CDM

DISTINZIONE FORZE DI MASSA - FORZE DI VOLUME

FORZA DI MASSA $\{g\}$, $\left[\frac{N}{kg}\right]$

FORZA DI VOLUME $\rho\{g\}$, $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

F. MASSA $\cdot \rho$ = F. VOLUME

CARATTERISTICHE MECCANICHE DI UN ACCIAIO (INDICATIVAMENTE)

ρ(termici lettori) = 0,15 → = 8,5

$\nu = 0{,}33$ $E = 206$ GPa , $G = 80$ GPa

$\alpha = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$, $h = 40\ W/mK$

INDICE PER TENSIONI / DEFORMAZIONI:
- PRIMO INDICE: SUPERFICIE SU CUI AGISCE (DIREZIONE DELLA NORMALE ALLA SUPERFICIE)
- SECONDO INDICE: DIREZIONE LUNGO CUI AGISCE LA COMPONENTE

EQUAZIONI (MECC. DEI SOLIDI)

CONGRUENZA (IMPLICITE)

$$\varepsilon_{tx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{ty} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{tz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO PER EQ.NI DIFFERENZIALI:

SI IPOTIZZA DI SUDDIVIDERE LA SUP. EXT IN DUE PARTI COMPLEMENTARI, TALI CHE

$S = S_u \cup S_f$ con $S_u \cap S_f = \emptyset$

S_u = SUP. CON CONDIZIONI SU SPOSTAM.

S_f = " " " - FORZE

EQUILIBRIO

DATI DUE SUBMULTIPLI

CRITERIO DELLA COPPIA DI FORZE - USARE UNA COPPIA PER EQUILIBRARE MOMENTI

CRITERIO DEL MOMENTO PURO - USARE UN MOMENTO MESSI PARALLELE PER EQUILIBRARE I MOMENTI

- TRASLAZIONE

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho f_z = 0$$

- ROTAZIONE

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$\varepsilon_{elastica} = \varepsilon^t - \varepsilon^0$

ε^0: def. iniziale

- $\varepsilon_0 = 0$ NESSUNA DEFORMAZIONE INIZIALE, $\varepsilon_{el} = \varepsilon_t$
- $\varepsilon_{el} = 0 \Rightarrow \varepsilon_t = \varepsilon_0 \Rightarrow$ ASSENZA DI VINCOLI
- $\varepsilon_t = 0 \Rightarrow \varepsilon_{el} = -\varepsilon_0 \Rightarrow$ ESTREMI VINCOLATI

LEGAME

PROCESSI TERMICI = INSERIRE IL VALOR MEDIO TRA RIS. IN E RIS. IN PER CICLO ...

- INVERSE

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

- DIRETTE

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}$$

CARRELLO

CERNIERA

DISTINZIONE TRAVI TOZZE - TRAVI VOLUME

È DATA DA $\frac{L}{h}$, CHE SI RICAVA DA $\sigma_{Ix_z} = \sigma_{Ix_2}$ (CALCOLATA CON TOZZE / CALCOLATA CON SNELLE)

$\frac{L}{h} < 1 \Rightarrow$ TOZZA, $\frac{L}{h} > 1 \Rightarrow$ SNELLA

CAUCHY

$$\begin{cases} f_x = l\,\sigma_x + m\,\tau_{yx} + n\,\tau_{zx} \\ f_y = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y + n\,\tau_{zy} \\ f_z = l\,\tau_{xz} + m\,\tau_{yz} + n\,\sigma_z \end{cases}$$

- f_x, f_y, f_z sono S_x, S_y, S_z sen sup. interna al solido
- $f = (f_x, f_y, f_z)$ forza di superficie
- $n = (l, m, n)$ versore normale alla superficie
- l, m, n coseni direttori

TRAVI

- PRINCIPIO DI DE SAINT VENANT

"A SUFFICIENTE DISTANZA DAGLI ESTREMI, LE FORZE ASSOCIATE ALLE SINGOLE BASI SI CONSIDERANO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITE"

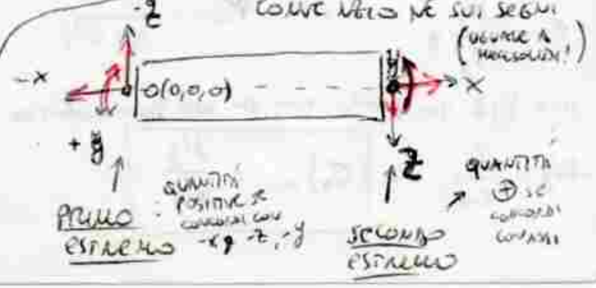
PRIMO MODO DI DEFORMAZIONE: **FORZA NORMALE** (ASSE RETTILINEO)

- $u(x) = \int_0^x \varepsilon_x\,dx$, l'integrale dipende dalle condiz. al contorno
- $N \neq 0$

RIGIDEZZA ESTENSIONALE DI UNA TRAVE: $k = \frac{EA}{L}$

- RIGIDEZZA ASSIALE

CONVENZIONE SUI SEGNI (UGUALE A MECCANICA!)



RIGIDEZZE → $k = \frac{F}{\delta} = \frac{\text{FORZA}}{\text{SPOSTAMENTO}}$ oppure $k = \frac{M}{\theta} = \frac{\text{MOMENTO}}{\text{ROTAZIONE}}$ ⊗ ← RIGIDEZZE INCROCIATE

$\frac{1}{k}$ = flessibilità

TIRO DEI FONDI

$T = p \cdot \frac{\pi}{4} d_i^2$

SERIE: CONDIVIDONO LA STESSA FORZA (O MOMENTO) • $\boxed{\left(\frac{1}{k_{eq}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}}$

PARALLELO: " LO STESSO SPOSTAMENTO (O ANGOLO DI TORSIONE) • $\boxed{k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_{eq}}$

INTERFERENZA TRA RIGIDEZZE ⇒ SERIE

Le rigidezze valgono sia in sistemi isostatici che iperstatici, valgono a prescindere

NELLE RIGIDEZZE, LO SPOSTAMENTO É QUELLO RELATIVO TRA I DUE ESTREMI CARICATI (SE UNO È VINCOLATO, IL SUO $\delta = 0$)

⊗ RIGIDEZZE INCROCIATE

$\frac{F}{\varphi} = \frac{\text{FORZA}}{\text{ROTAZ.}}$

$\frac{M}{w} = \frac{\text{MOMENTO}}{\text{SPOSTAM.}}$

$F/\theta = \frac{M}{\delta}$ di solito

Cause di sollecitazione per una trave • CARICHI
- FORZE CONCENTRATE [N]
- FORZE DISTRIBUITE [Pa]
- VARIAZIONI DI TEMPERATURA [°C] o [K]

↓

QUANTITÀ NULLE SONO QUANTITÀ NOTE (FORZE NULLE, VINCOLI PER NON SPOSTAMENTO)

• SPOSTAMENTI
- TRASLAZIONI
- ROTAZIONI

SECONDO MODO DI DEFORMAZIONE: **TORSIONE** (ASSE RETTILINEO)

" CONGRUENZA "

SEZIONE RETTANGOLARE

$\tau_{max} = \alpha \frac{M_t}{b a^2}$

$k_t = \beta \frac{M_t}{G b a^3}$

$\tau_{max} = \frac{\alpha}{\beta} G k_t a$

$\frac{b}{a} = 1 \rightarrow \alpha = 4{,}804$, $\beta = 7{,}114$

$\frac{b}{a} \gg 1 \rightarrow \alpha = \beta = 3$

• $\gamma = \gamma_{max} \cdot \frac{2r}{d}$ ove r é variabile, $0 < r < \frac{d}{2}$

• $\gamma_{max} = \frac{\theta}{L} \cdot \frac{d}{2}$, $\theta_x(x) = \theta \frac{x}{L}$, $k_t = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{\theta}{L}$ (se vale la teoria di COULOMB)

⇒ $\gamma(r) = k_t \cdot r = \frac{\theta}{L} \cdot r$

τ_{max} nei punti medi dei lati lunghi e nulla sui vertici della sezione

EQUILIBRIO

$M_t = G k_t J_p$

• $M_t \neq 0$

$J_p = \begin{cases} \frac{\pi}{32} d^4 = J_0 & \text{sez circolare piena} \\ \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4) & \text{sez circolare tubolare (polare)} \\ \frac{b a^3}{12} & \text{sez rettangolare (in torsione non si usa) in flessione sì} \end{cases}$

$\boxed{J_y = \frac{\pi d^4}{64},\ J_z = \frac{\pi d^4}{64}}$

$\boxed{M_t = \frac{G J_p \theta}{L}}$ Eq^{ne} FONDAM.

$\boxed{k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{G J_p}{L}}$ RIGIDEZZA TORSIONALE

ANGOLI IN RAD

I DIAMETRI CALCOLATI DEVONO ESSERE NUMERI INTERI

$\tau_{x\theta} = \frac{M_t}{J_p} \cdot r = \tau_{x\theta}(r) \Rightarrow u_\theta = \theta \cdot r$

↓

$(\tau_{x\theta})_{max} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_t}{W_t}$ ove $W_t = \frac{J_p}{d/2} = \begin{cases} \frac{\pi}{16} d^3 & \text{sez piena circolare} \\ \frac{\pi}{16} \frac{d_e^4 - d_i^4}{d_e} & \text{sez cava circolare} \end{cases}$. $\frac{b a^2}{6}$ (sez rettangolare, si usa in flessione)

TERZO MODO DI DEFORMAZIONE: **FLESSIONE** (ASSE: LINEA ELASTICA) → ASSE NEUTRO = ASSE BARICENTRICO

ASSUNZIONI • $u = 0\ \forall x$, w infinitesimo (o v)

• $\gamma_{ji} = 0\ \forall i,j$ (sezioni ruotano) ⇒ $\theta = \varphi$

• σ_x FARFALLA

• τ_{xz} / τ_{yz} andamento a parabola (JOURAWSKI)

TAGLIO (JOURAWSKI)

• $\tau_{xz}/\tau_{xy} = 0$ ai bordi

• $\tau_{xz}/\tau_{xy} = max$ in $z = 0$ (o $y = 0$)

$\tau_{xz\,med} = \frac{T_z}{A}$ $\left(\tau_{xy\,med} = \frac{T_y}{A}\right)$

$\tau_{xz\,max} = \frac{3}{2} \tau_{xz\,med}$ se rettangolare piena

$\tau_{xz\,max} = \frac{4}{3} \tau_{xz\,med}$ se circolare piena

(analogo per τ_{xy})

LEGAME $\sigma_x = \varepsilon_x E$ (τ_{xz} o τ_{yz} non sono legate a $\gamma_{ji} = 0$) vale per x-z e x-y

RIGIDEZZE (x-z)

• APPOGGI, F IN MEZZERIA: $k = \frac{F}{\delta} = \frac{48 E J_y}{L^3}$

• MENSOLA, F IN PUNTA: $k = \frac{F}{\delta} = \frac{3EJ_y}{L^3}$

• " , m " " : $k = \frac{m}{\varphi} = \frac{EJ_y}{L}$

$k = \frac{m}{\delta} = \frac{2EJ_y}{L^2}$

TRAVE CON APPOGGI CARICATA DA q COST.: $k = \frac{qL}{\delta} = \frac{384 EJ_y}{5 L^3}$

• APPOGGI, m ad un estremo: $k = \frac{m}{\theta} = \frac{3EJ_y}{L}$

x-z

• T_z, $M_y \neq 0$

• $\varphi_y = \theta_y$

• $k_y = \frac{d\varphi_y}{dx} \Rightarrow \varepsilon_x = z \frac{d\varphi_y}{dx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2}$ ← CONGRUENZA

• $M_y = -E \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot J_y$ $J_y = \int z^2\, dA$

$V_{max} = \frac{5 w L^4}{384 E J_y}$ con $w = q$

• $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$

• $u = \varphi_y z$ per punti non su asse baricentrico (neutro)

• $W_y = \frac{J_y}{z_{max}} \Rightarrow \boxed{(\sigma_x)_{max} = \frac{M_y}{W_y}}$

x-y

• T_y, $M_z \neq 0$

• $\varphi_z = \theta_z$

• $k_z = \frac{d\varphi_z}{dx} = -\frac{d^2 v}{dx^2} \Rightarrow \varepsilon_x = +y \frac{d^2 v}{dx^2}$

• $M_z = -E \frac{d^2 v}{dx^2} J_z$ $J_z = \int y^2\, dA$

• $\sigma_x = -\frac{M_z}{J_z} y$

• $u = -\varphi_z \cdot y$ per punti non su asse baricentrico (neutro)

• $W_z = \frac{J_z}{y_{max}} \Rightarrow (\sigma_x)_{max} = -\frac{M_z}{W_z}$

MOMENTI D'INERZIA: VEDERE SOPRA

TRAVI

CARICHI DISTRIBUITI → non sono forze, sono forze x unità di "qualcosa"

- PESO $q = q(x) = \frac{P}{L} = \delta \cdot A$ $\quad (\delta = \rho g)$ (PESO SPECIFICO), qui A è la sezione della trave (sez. piane)
- PRESSIONE UNIFORME $q = q(x) = \frac{P \cdot A}{L}$, se rettangolare e pezzente su base laterale, $q = Pb$ (b L)

piano $x-z$

equilibrio:
- $\frac{dT_z}{dx} = -q_z \Rightarrow q_z = -\frac{d^2M_y}{dx^2} = -\frac{dT_z}{dx} \rightarrow \boxed{q_z = EJ_y \frac{d^4w}{dx^4}}$ **LINEA ELASTICA (x-z)**
- $\frac{dM_y}{dx} = T_z$

IV : q
III : T
II : M
I : φ
0 : w-v

piano $x-y$
- $\frac{dT_y}{dx} = -q_y \Rightarrow q_y = \frac{d^2M_z}{dx^2} = -\frac{dT_y}{dx} \rightarrow \boxed{q_y = EJ_y \frac{d^4v}{dx^4}}$ **LINEA ELASTICA (x-y)**
- $\frac{dM_z}{dx} = -T_y$

FLESSIONE SU X-Z, MOMENTO CONCENTRATO IN PUNTO ESTREMO $\Rightarrow \varphi_y(x=0) = \frac{mL}{3EJ_y}$, $\varphi_y(x=L) = -\frac{mL}{6EJ_y}$

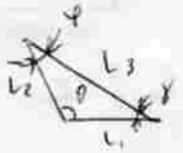
ESTREMI CON APPOGGIO
- $w(0) = 0$ (I)
- $M_y(0) = -m$ (II)
- $M_y(L) = 0$ (III)
- $w(L) = 0$ (IV)

CONDIZ. AL CONTORNO

PER LINEA ELASTICA, CDS: CALCOLARE FORZE DELLA PARTE SX MENO DX [OPPURE FORZE " " DX " SX]

Se T lineare ⇒ M quadratico e $M_{max} = \frac{qL^2}{8}$ (q = cost)
Se T costante ⇒ M lineare e $M_{max} = \frac{PL^2}{4}$ (P = TAGLIO COSTANTE)

TEOREMA DI CARNOT



$L_3^2 = L_1^2 + L_2^2 - [L_1 L_2 (\cos\theta)]\, 2$
il resto di conseguenza

TRAVI - CARICHI MISTI $(N, T_y, T_z, M_y, M_z, M_t)$
- σ si somma algebricamente - formula di Navier
- τ " " vettorialmente

PPT e PPD

PPT = NON VI SONO VINCOLI IN DIREZIONE z, FORZE ⊥ z e ∈ xy
$\sigma_z = 0 = \tau_{xz} = \tau_{yz} \Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sono indipendenti da z

MA $\sigma_z = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}$ (a) da eq. di legame

NAVIER
$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y$

PPD = BASI DEL CORPO "CILINDRICO" VINCOLATE LUNGO L'ASSE z $(\varepsilon_z = 0)$, CARICHI ⊥ z, ∈ xy
- $w = 0$
- $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ INDIPENDENTI DA z

MA $\boxed{\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)}$ – (b)

TRAVATURE RETICOLARI: $N_a + N_e = 2 N_c$ (N_a n° aste, N_e n° vincoli est., N_c n° cerniere)
↓
ISOLARE NODO PER NODO FACENDO EQUILIBRIO SU x e y (CONSIGLIATO METODO GRAFICO)

INCOGNITE (PPT e PPD) - EQUAZIONI
- $\{u\} = \{u; v\}$
- $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \gamma_{xy}\}$
- $\{\sigma\} = \{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\}$

CONGRUENZA (IMPLICITE)
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$
$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$
$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

EQUILIBRIO
$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho g_x = 0$
$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho g_y = 0$

LEGAME - PPT - (a)

DIRETTE	INVERSE
$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$
$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$
$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

Valide anche x lastre piane inflesse

LEGAME - PPD - ⓑ

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right] \qquad \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right]$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

DIRETTE | INVERSE

(*) se $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, tutte le (∞) direzioni ⊥ a quella di σ_3 sono principali
se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, lo stato di tensione si dice sferico

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\,\tau_{yx} = f_x \\ l\,\tau_{xy} + \sigma_y \cdot m = f_y \end{cases} \text{ su } S_f, \quad \begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \end{cases} \text{ su } S_u$$

TENSIONI E DIREZIONI PRINCIPALI

eq.ne secolare $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$ $\quad \sigma_p \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ $\quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

- $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$
- $I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2$
- $I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - (\sigma_x\tau_{zy}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) + 2\tau_{xy}\tau_{zx}\tau_{zy}$
- (*) $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
- $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$
- $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_p)\,l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0 \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma_p)m + \tau_{yz}n = 0 \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma_p) = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

TROVATE LE DIREZIONI, VERIFICARE CHE I VERSORI SIANO ORTOGONALI FACENDO IL PRODOTTO SCALARE

LE DIREZIONI SI INDICANO CON I VERSORI

MOHR

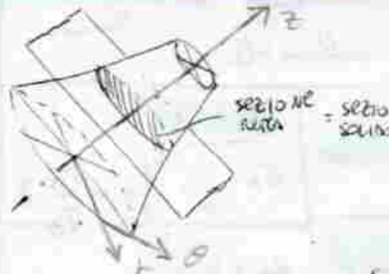
In Mohr (caso generale, 3 cerchi) $\tau_{max} = \sigma_{p\,max} - \sigma_{p\,min}$ ($\sigma_{p\,max}$ e $\sigma_{p\,min}$ con segno)

TRAVI CON MOHR

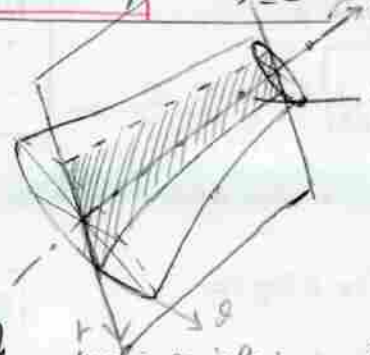
$\sigma_y = 0$, $\sigma_x \neq 0$ $\tau_{xy} = \tau \Rightarrow \boxed{\sigma_{a,b} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)}$ con $\sigma_a \geq 0$, $\sigma_b \leq 0$ } SEMPRE

PROBLEMI ASSIALSIMMETRICI

r, θ, z COORDINATE CILINDRICHE



SEZIONE RETTA = SEZIONE DEL SOLIDO E PIANO ⊥ ASSE z



SEZIONE MERIDIANA = SEZIONE DEL SOLIDO E PIANO CONTENENTE L'ASSE z (PIANO DIAMETRALE)

CARICO ASSIALSIMMETRICO: $\vec{q} = \{q_r(r,z), q_z(r,z)\}$ (ESCLUDE LA TORSIONE DELLE TRAVI, NON CONTA COME ASSIALSIMM.) → TORSIONE AGISCE SU θ

negli assialsimm. $\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} = 0$, $(\cdot)$ è una quantità qualsiasi

SPOSTAMENTI $\hat{u} = \{u_r(r,z), u_\theta(r,z), u_z(r,z)\}$ se si ammette $u_\theta = \alpha r$, α angolo rotazione rigida

$\vec{u} = \{u_r(r,z), u_z(r,z)\}$ altrimenti

TENSIONI / DEF

- σ_r — ε_r
- σ_θ — ε_θ
- σ_z — ε_z
- τ_{rz} — γ_{rz}
- $\tau_{r\theta} = 0$, $\tau_{z\theta} = 0$ } x LEGAME — $\gamma_{r\theta} = 0$, $\gamma_{\theta z} = 0$ } x ASSIALSIMMETRIA

EQUAZIONI DI CONGRUENZA ASSIALSIMM.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u_r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}$$

EQUAZIONI DI LEGAME

Inverse

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right]$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{G}\tau_{rz}$$

Dirette

$$\sigma_r = 2G\left[\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_\theta = 2G\left[\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta)\right]$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz}$$

PAG - Tutte le sezioni rette rimangono piane e $\frac{\partial(\,)}{\partial z} = 0$ per tutte le quantità, tranne u_z
- solo cilindri di sezione circolare
- r unica variabile
- $\tau_{rz} e \gamma_{rz} = 0$

equazioni

equilibrio: $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho f_r = 0$

II eq^ne diff. $(\sigma_r - \sigma_\theta)(1+\nu) = r\left[\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} - \nu\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial r}\right)\right]$

$\Rightarrow \sigma_z = \text{cost} \Leftrightarrow \varepsilon_z = \text{cost}$ e viceversa

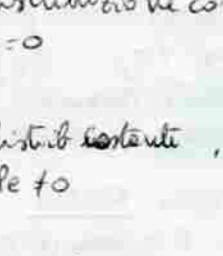
• Se $\sigma_r = -P_i$ con $r = a$ (r int)
$\sigma_r = -P_e$ con $r = b$ (r est)

allora

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{a^2 P_i - b^2 P_e}{b^2 - a^2} - \dfrac{b^2 a^2}{b^2 - a^2}\dfrac{(P_i - P_e)}{r^2} \\[2ex] \sigma_\theta = \dfrac{a^2 P_i - b^2 P_e}{b^2 - a^2} + \dfrac{b^2 a^2}{b^2 - a^2}\dfrac{(P_i - P_e)}{r^2} \end{cases}$$

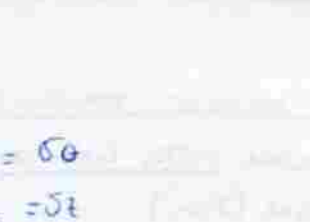
• Se $P_i = 0$ e $P_e = P$ $(\sigma_\theta < \sigma_z < \sigma_r)$

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)P \\[2ex] \sigma_\theta = -\dfrac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)P \end{cases}$$



• Se $P_i = P$ e $P_e = 0$ $(\sigma_r < \sigma_z < \sigma_\theta)$

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \dfrac{b^2}{r^2}\right)P \\[2ex] \sigma_\theta = \dfrac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \dfrac{b^2}{r^2}\right)P \end{cases}$$



• $\sigma_z = \dfrac{P a^2}{(b^2 - a^2)}$ se σ_z ha distribuzione costante, $P\pi a^2 = \int_A \sigma_z(r)\,dA$ altrimenti se $P_i \neq 0$ e $P_e = 0$

• $\sigma_z = -\dfrac{P b^2}{b^2 - a^2}$ se σ_z ha distrib costante, $P\pi e^2 = \int_A \sigma_z(r)\,dA$ altrimenti se $P_i = 0$ e $P_e \neq 0$

P.A.G. - PPD, $\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)$

$\sigma_z = \dfrac{2\nu P a^2}{b^2 - a^2}$ se $P = P_e$, $\sigma_z = -\dfrac{2b^2 \nu P}{b^2 - a^2}$ se $P = P_i$

P_i $\begin{cases} \sigma_I = \sigma_\theta \\ \sigma_{II} = \sigma_z \\ \sigma_{III} = \sigma_r \end{cases}$

P_e $\begin{cases} \sigma_I = \sigma_r \\ \sigma_{II} = \sigma_z \\ \sigma_{III} = \sigma_\theta \end{cases}$

PROBLEMI SPECIALI - SIMMETRIA SFERICA

COORDINATE SFERICHE: (r, θ, φ)

OGNI DIAMETRO CONSENTE DI VERIFICARE QUESTA UGUAGLIANZA (RIFERIMENTI VOLUME X θ E φ)

- $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ e $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$ (SIMMETRIA SFERICA)

- equilibrio: $\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\,\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$

PRESSIONE INTERNA $(p_i = p,\ p_e = 0)$

- $\sigma_r = \frac{a^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right)p$
- $\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{a^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right)p$

$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_I > 0$

$\sigma_r = \sigma_{III} < 0 \quad (\sigma_{II} = 0)$

PRESSIONE ESTERNA $p_i = 0,\ p_e = p$

- $\sigma_r = \frac{-b^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)p$
- $\sigma_\theta = \sigma_\varphi = -\frac{b^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)p$

$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_{III} < 0$

$\sigma_r = \sigma_I \cancel{<} 0 \qquad \sigma_{II} = ?$

DISCHI ROTANTI - SONO P.P.T. CON SIMMETRIA CILINDRICA

eq^{ne} fondamentale: $\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{d}{dr}(\ln z) + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}(\ln z) - \frac{1}{r^2}\right]u + \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r = 0$

risolvibile se
1. $z = \text{cost}$ (SPESSORE COST)
2. $z = C r^a$ (SPESSORE CON PROFILO IPERBOLICO) / $z = b - Cr$ (SPESSORE CON PROFILO TRAPEZOIDALE)
3. $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_{moto}$ (RESISTENZA UNIFORME)

LASTRA FORATA (KIRSCH) f_x [MPa] $\sigma_x = f_x$ si ha $\sigma_r = \sigma_x \cos\theta\cos\theta = \frac{1}{2}f_x(1+\cos 2\theta)$

$\tau_{r\theta} = -\sigma_x\cos\theta\sin\theta = -\frac{1}{2}f_x\sin 2\theta$

quindi
- $\sigma_\theta = \frac{1}{2}f_x\left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \longrightarrow$ nel foro $(r = a) \Rightarrow \sigma_\theta = f_x(1 - 2\cos 2\theta) \to \sigma_{\theta max} = 3f_x$, $\sigma_{\theta min} = -f_x$; $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$
- $\sigma_r = \frac{1}{2}f_x\left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right]$
- $\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}f_x\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$

$$\boxed{k_t = \frac{\sigma_{\theta max}}{\sigma_x} = \frac{\text{TENSIONE MAX}}{\text{TENSIONE NOMINALE}} = 3}$$

FATTORE CONCENTRAZIONE

RESISTENZA STATICA

"METODO RISOLUTIVO"

I) DETERMINARE STATO DI TENSIONE CRITICO (CON I VARI CRITERI A DISPOSIZIONE)

II) " " PUNTO CRITICO (O SEZIONE PIÙ SOLLECITATA) IN CUI SI HA QUESTO STATO (PER VERIFICA)

III) CONFRONTARE CON CARATTERISTICHE MECCANICHE DEL MATERIALE (SIA PER PROGETTAZIONE CHE PER VERIFICA)

STATO DI TENSIONE MONOASSIALE: CONFRONTO DIRETTAMENTE LA TENSIONE PRINCIPALE CON LE CARATTERISTICHE MECCANICHE DEL MATERIALE $(\sigma_I < \sigma_e)$
- DUTTILI $\sigma_e = \sigma_s$ (SNERVAM.)
- FRAGILI $\sigma_e = \sigma_R$ (ROTTURA)

STATO DI TENSIONE TRIASSIALE: CRITERI

- MATERIALI DUTTILI SIMMETRICI (TRAZ - COMPRESS)
  - TRESCA (τ_{max})
  - HUBER - HENCKY - VON MISES (V_d)
- MATERIALI DUTTILI ASIMMETRICI
  - CRITERIO COULOMB - MOHR
- MATERIALI FRAGILI
  - MAX σ NORMALE ⊕ E MIN σ NORMALE ⊖
  - CRITERIO COULOMB - MOHR
  - CRITERIO COULOMB - MOHR MODIFICATO

CASI PARTICOLARI

- COMPRESSIONE IDROSTATICA NON PORTA MAI A ROTTURA
- TRAZIONE " DÀ COMPORTAMENTO FRAGILE (σ_R)
- COMPRESSIONE TRIPLA (MISTA) DÀ COMPORTAMENTO DUTTILE (σ_s)
- TRAZIONE MISTA O COMPRESSIONE SEMPLICE / ~~DOPPIA~~ ROTTURA MISTA