INGEGNERIA FINANZIARIA

Lez 1
09/03

NB MERCATO EFFICIENTE:

Per i MERCATI FINANZIARI l'efficienza è l'INFORMAZIONE. I prezzi riflettono l'informaz. disponibile agli investitori. Esistono due tipi di informazione:

- PUBBLICA: disponibile a tutti (es. ultimo bilancio x un'azienda)
- PRIVATA: non disp. a tutti

NB I prezzi passati possono essere utili per ottenere informazioni riguardo l'andamento del prezzo nel futuro? Ho due scuole di pensiero!

I 'praticoni' applicano l'<u>ANALISI TECNICA</u> ovvero ipotizzano l'andamento del prezzo nei mercati finanziari studiando le fluttuazioni del prezzo nelle serie storiche.

Tuttavia si pensa che l'analisi tecnica abbia più costi (relativi al lavoro svolto) rispetto al guadagno che si può ottenere da questa informazione tecnica.

interesse annuo
→ quindi 3000€ ogni anno

es Il governo mi presta 100'000€ per 10 anni al 3% di interessi. Attualizzo al tasso 10%

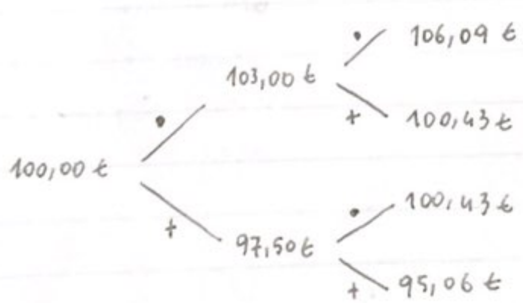
$$VAN = +100'000 - \sum_{t=1}^{10} \frac{3'000}{1{,}1^t} - \frac{100'000}{1{,}1^{10}} = 43'012\ €$$

NB La variazione del prezzo delle azioni non riflette alcun ciclo regolare!

> Da un punto di vista stocastico la variaz. del prezzo delle azioni è casuale!
> Il prezzo delle azioni invece non è casuale!

NB Il CAMMINO CASUALE è il processo stocastico che utilizzeremo

es. TESTA • +3%
CROCE + −2,5%



LEZ 2

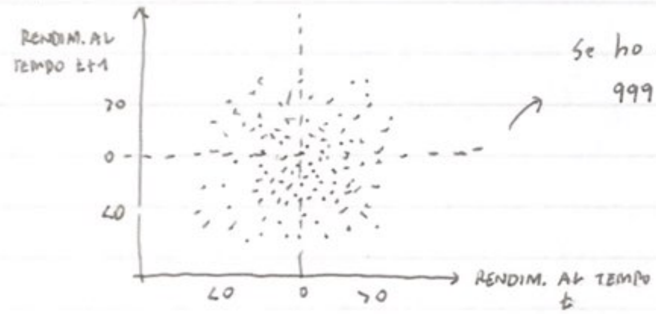
10/03

NB TEORIA DEL CAPM: modello matematico che determina una relazione tra il rendimento di un titolo e la sua rischiosità, misurata tramite un unico fattore di rischio detto beta

↳ β rosa associata al portafoglio di mercato

NB SP500: è un indice che segue l'andamento di un paniere azionario formato dalle 500 aziende statunitense a maggiore capitalizzazione

NB SCATTER PLOT:



Se ho 1000 prezzi avrò 999 ritorni

Se a un ritorno positivo segue un negativo avrò una retta avremo punti in basso a dx

Questo grafico mi aiuta a capire: se ho avuto ritorno positivo oggi, domani come sarà?

Questo dipende dalla correlazione → AUTO CORRELAZIONE (cross correlazione indica la relazione tra due titoli, qua invece consideriamo uno)

↳ correlazione tra ritorni di giorni successivi per un determinato titolo

L'ERRORE DI STIMA diminuisce al crescere del numero di punti, l'errore di stima è circa la √ del numero di punti

NB: Conoscere il ritorno che avrò domani corrisponde a conoscere il prezzo di domani!

NB: Non ho memoria x il segno del ritorno ma ho memoria sul size, magnitudo

EFFICIENZA INFORMATIVA

NB EFFICIENZA DEL MERCATO IN FORMA:

- DEBOLE: prezzi di mercato riflettono le info contenute nelle serie storiche dei prezzi
- SEMI-FORTE: prezzi di mercato riflettono tutte info disponibili al pubblico
- FORTE: prezzi riflettono info disponibili a pubblico e insider

Siccome mercato non riesce a essere efficiente in forma forte esistono leggi che lo tutelano, per esempio non possono operare sul mercato gli insider (es. manager) delle passate fluttuazioni di prezzo

NB **ANALISI TECNICA**: analisti effettuano previsione del prezzo delle azioni in base a dati storici delle passate fluttuazioni di prezzo

ANALISI FONDAMENTALE: ci dice quale dovrebbe essere il prezzo giusto; si stima il valore delle azioni attraverso VAN e flusso di cassa

NB FONDI DI INVESTIMENTO PASSIVI vs FONDI COMUNI DI INVESTIMENTO

LEZ 3

12/03

MATLAB

MATLAB

NB LINEA DI COMANDO = COMMAND WINDOW = finestra centrale dove scrivo comandi

NB edit : ti apre nuovo script

help win : ti dice toolbox installati

$\boxed{\blacktriangle}$: mi esce tutte operazioni fatte

linspace (x_1, x_2, x): vettore di x valori tra x_1 e x_2

$x_1 : x : x_2$ = vettore che parte da x_1 e arriva a x_2 con passo x

abs = modulo, valore assoluto

$[x_1, x_2, x_3]$ = vettore riga

$[x_1; x_2; x_3]$ = vettore colonna

A(3,2): mi restituisce il valore della matrice A nel punto riga 3 colonna 2

A(2,:): tutti valori della riga 2

sum (A) = somma di tutti i valori di A

$X = [x_1, x_2, x_3]$

cumsum (x) = x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$

[M, I] = max (x) o = min (x) : mi dice posizione e valore del max del vettore x

sort (x): ordina x in modo crescente

zeros (m,n), ones (m,n) = matrice di tutti zero o 1 di riga m e colonna n

rand (m,n) = matrice casuale tra zero e 1

randn('seed', 123456) , X = rand (m,n) : rand genera numeri semi casuali e 123456 è il seme / la chiave

randn (m,n) = numeri casuali estratti da distribuzione normale (gaussiana)

LEZ 4
16/03
MATLAB

NB $x = x_1 : p : x_2$ = vettore da x_1 a x_2 con passo p

NB POLINOMI: non so se li ho fatti o meno

NB if condizione 1 operazione 1 | else operazione 3
elseif condizione 2 operazione 2 | end

NB ~= : diverso

NB while condiz. operaz. end = ciclo while esegue ciclo finché la condizione è verificata

NB disp ('bla bla') = far apparire scritta blabla

NB ylabel ('bla') = scrivere bla su asse y

NB hold on = mantieni grafico precedente

NB subplot (x_1, x_2, K) = dividi grafico in x_1 righe e x_2 colonne, poi plotta grafici nei quadranti $K = 1, 2..$
es. subplot (1,2,1), plot (.... , subplot (1,2,2), plot (..)

NB close all = chiudi tutti grafici

NB edit = new script

LEZ 5
19/03

DEF **Definizione di probabilità:**

- **DEF. CLASSICA:** la probabilità di un evento casuale è il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili purché siano tutti equiprobabili (es. dado)
Questa def. è valida se: dati sono conosciuti a priori (Bernoulli, Laplace)
- **DEF. FREQUENTISTA:** la probabilità di un evento casuale è il limite a cui esso tende al crescere del numero di osservazioni, in una serie di esperienze ripetute nelle stesse condizioni.
Questa def. è valida per stimare la prob. di eventi sperimentali; stima a posteriori (von Mises)
- **DEF. ASSIOMATICA:** la probabilità è una funzione che associa un numero reale ad ogni elemento dello spazio e ha le seguenti caratteristiche: - compresa tra zero e uno - è uguale a uno nel caso di evento certo - dati due eventi mutuamente esclusivi la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità

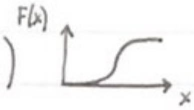
DEF **ESPERIMENTO:** processo i cui esiti siano tutti catalogabili a priori ma il singolo esito non sia noto a priori

Lo conosco tutte le possibili uscite ma non conosco il risultato certo a priori

DEF **SPAZIO CAMPIONARIO**: insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento

DEF **EVENTO**: gruppo di possibili esiti di un esperimento o sottoinsieme dello spazio campionario

NB FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE (CDF = Cumulative Distribution Function)

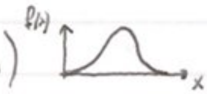


Data una v.a. X si definisce $F(x) = p(X \leq x)$ con x valori che può assumere

x è un numero ξ

$0 \leq F(x) \leq 1$; $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$; $p(X \leq b) = p(X \leq a) + p(a < X \leq b)$

NB FUNZIONE DI DENSITÀ (PDF = Probability Density function)



Data una v.a. X con cdf $F(x)$ derivabile si definisce $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

$f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \longrightarrow \int_A^B f(x)\, dx$ indica la prob che $X \in$ all'insieme $[A, B]$

DEF Data una v.a. X e una funzione $U(x)$ si definisce $E[U(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cdot f(x)\, dx$ VALORE ATTESO DI $U(x)$

DEF MEDIA $E(X) = \mu$

DEF VARIANZA $\sigma = \sqrt{E[(x - E(x))^2]}$

DEF COVARIANZA $\sigma_{x_1 x_2} = E[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)]$

DEF MEDIANA valore ξ tale che $P(X < \xi) = 1/2$ e $P(X \geq \xi) = 1/2$

DEF MODA valore più frequentemente ripetuto, ovvero valore di X che massimizza $f(x)$

DEF PERCENTILE elemento di una serie al di sotto del quale si trova una percentuale α del totale dei dati: $P(X < \xi_\alpha) = \alpha$ $\quad P(X > \xi_\alpha) = 1 - \alpha$

NB Skeweness: $S = \frac{E[(x - E(x))^3]}{\sigma^3}$ $\qquad K = \frac{E[(x - E(x))^4]}{\sigma^4}$ Curtosi

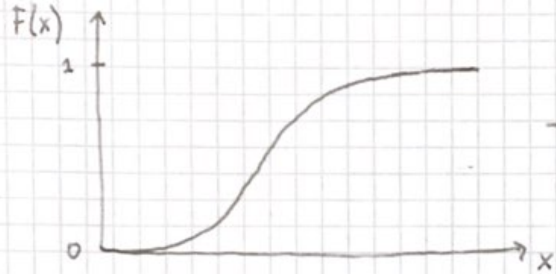
NB Distribuzione NORMALE: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$E[x] = \mu \quad \text{MEDIA}$$

$$E[(x-\mu)^2] = \sigma^2 \quad \text{VARIANZA}$$

NB FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE (CDF = CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION)

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

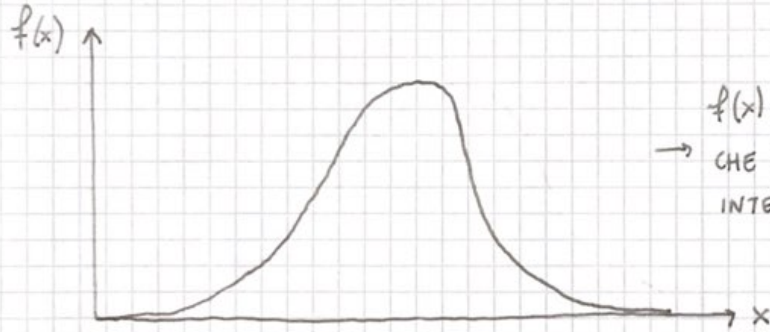


→ PROBABILITÀ CHE LA V.A. X SIA MINORE O UGUALE DEL VALORE x

↳ se $x \to +\infty$ $F(x) = 1$
se $x \to -\infty$ $F(x) = 0$

NB FUNZIONE DI DENSITÀ (PDF = PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

$$\boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$



→ $f(x)\,dx$ MISURA LA PROBABILITÀ CHE X ASSUMA VALORI NELL'INTERVALLO $x + dx$

↳ $\int_A^B f(x)\,dx$ = PROB. CHE X CADA NELL'INTERVALLO $[A, B]$

↳ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

↳  FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROB. DI UNA V.A. CON DISTRIBUZIONE UNIFORME

↳  DISTRIBUZIONE GAUSSIANA è una distribuzione di probabilità usata spesso per descrivere variabili che tendono a concentrarsi attorno ad un valor medio!!!

NB **Valore atteso:** $E[X] = \sum P(X = x_i) \cdot x_i$ PER V.A. DISCRETE

$$\hookrightarrow \boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

↳ Prob. che X cada in $x + dx$ moltiplicata per valore di x

$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

$E[Y]$ con $Y = U(X)$ allora $E[Y] = E[U(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cdot f(x)\,dx$

NB Valore medio: $E[X] = \mu$

NB **Varianza:** $\boxed{\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]}$

NB Covarianza: $\boxed{\sigma_{X_1X_2} = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}$

NB Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

DEF 1. MEDIANA: valore per cui la probabilità per cui X sia maggiore è 0.5 e che sia minore o uguale è sempre 0.5

2. MODA: valore più frequentemente ripetuto, in corrispondenza del quale si verifica il picco della pdf.

3. PERCENTILE DI ORDINE α: elemento di una serie in cui si ha $P(X \leq x) = \alpha$

NB Skeweness: $\gamma_3 = \dfrac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$

NB Kurtosis: $\gamma_4 = \dfrac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$

RICORDA

1. COVARIANZA: è un numero che fornisce una misura di quanto due variabili aleatorie varino insieme ovvero misura la loro dipendenza.
2. VARIANZA: è un numero che fornisce la variabilità dei valori assunti dalla v.a., nello specifico misura quanto i valori si discostano quadraticamente dal valore atteso (ovvero dalla media)

• INTRODUZIONE AI PROCESSI STOCASTICI (TALK 03) •

NB Quando vogliamo definire SERIE TEMPORALI attraverso un processo stocastico supponiamo che non siano deterministiche ma abbiano comportamenti casuali

NB Lo SPAZIO DI PROBABILITÀ è costituito da $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dove

Ω = SAMPLE SPACE (o spazio degli eventi) ovvero tutti gli eventi che si possono verificare

$\mathcal{F}$ = SIGMA ALGEBRA (ora non ci interessa parlarne)

P = PROBABILITÀ compreso tra zero e uno (def. assiomatica)

↳ Una v.a. è una funzione che associa un'elemento del sample space a un numero, a questa v.a. poi è associata una distribuzione di probabilità.

NB Il processo è qualcosa che evolve nel tempo, dato quindi uno spazio di probabilità noi abbiamo un'insieme di variabili aleatorie diverse. Per esempio noi abbiamo lancio di una moneta dove il sample space è testa o croce con probabilità 1/2 e 1/2: la variabile aleatoria associa ad un evento un numero per esempio $T=1$ e $C=0$ ma un'altra v.a. può definire $T=3$ e $C=8$ per esempio!

NB Avremo PROCESSO STOCASTICO a tempo DISCRETO e a tempo CONTINUO!

NB Nei PROCESSI STOCASTICI abbiamo due elementi:

1. **EVENTO:** per esempio testa o croce, la faccia del dado. Ad ogni evento è associato un numero
2. **TEMPO:** se evento si verifica a tempo 1, 2, 1000 eccetera

In pratica il processo stocastico è una funzione a due variabili (eventi e tempo) dove dove t = TEMPO e w = EVENTO, $t \in T$ e $w \in \Omega$

Per descrivere un processo devo definire tutte le distribuzioni di probabilità e le prob. congiunte!

NB Esempi di variabili aleatorie definite analiticamente

- $X_t = A_t t + B_t$ dove A_t e B_t sono variabili random con una distribuz. di probabilità
- $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ dove ε_t è una variabile random iid con distribuzione normale di media zero e varianza σ^2 ($N(0,\sigma)$) ovvero a passi diversi t sono identicamente e indipendentemente distribuiti!

NB Noi consideriamo un PROCESSO STOCASTICO GAUSSIANO nel momento in cui tutte le sue distribuzioni di probabilità sono gaussiane. Un esempio è dato da variabili random iid con $N(0,\sigma)$, in questo caso vale la proprietà:

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_{t_n} \leq x_n)$$

Si parla di Gaussiana multivariata in più dimensioni

NB Il valore atteso, la varianza e l'autocorrelazione possiamo definirli anche nel caso del processo stocastico, in questo caso però non saranno numeri ma funzioni

nel processo stocastico abbiamo tante variabili aleatorie

La covarianza invece nel caso di processi stocastici prendiamo due variabili aleatorie diverse una a tempo t e una a tempo s e così possiamo calcolarci la covarianza normalmente attraverso la formula $cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_{X_t})(X_s - \mu_{X_s})]$ questa funzione qua è una funzione bidimensionale perché dipende sia da t sia da s.

in pratica X_t e X_s sono la stessa variabile aleatoria presa a due tempi differenti

Scriveremo $\boxed{cov(X_t, X_s) = \Gamma_X(t, s)}$

$E(X_t) = \mu_{X_t}$ VALORE ATTESO $\qquad \sigma^2_{X_t} = var(X_t) = \Gamma_X(t, t)$ VARIANZA

$$\rho_{X_t} = \frac{\Gamma_X(t, s)}{\sigma_{X_t}\, \sigma_{X_s}}$$ FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

Ricorda: i prezzi delle azioni non sono stazionari, i ritorni invece più o meno sì!

NB Il MOTO BROWNIANO è un PROCESSO GAUSSIANO non stazionario

Una DISTRIBUZIONE GAUSSIANA per essere definita ha bisogno di due variabili: MEDIA e VARIANZA

Nel caso di un PROCESSO GAUSSIANO per descriverlo sono necessarie due variabili: MEDIA e COVARIANZA

Esempio di un PROCESSO STOCASTICO GAUSSIANO: $E(X_t) = \mu \cdot t$

moto browniano

$cov(X_t, X_s) = \sigma^2 \cdot \min(t, s)$

Esercizio: 1. Considero processo Gaussiano composto da variabili casuali iid $N(0,1)$ quindi calcolo $E(X_t)$ e $cov(X_t, X_s)$:

$E(X_t) = 0 \qquad cov(X_t, X_s) = E[X_t \cdot X_s] = E(X_t) \cdot E(X_s) = 0$

2. $X_t = A_t \cdot t + B_t$ con $E(A_t) = \alpha$, $E(B_t) = \beta$, $var(A_t) = \sigma_1^2$, $var(B_t) = \sigma_2^2$

Calcolare $E(X_t)$ e $cov(X_t, X_s)$ con A_t e B_t variabili random non correlate

$E(X_t) = \alpha t + \beta \qquad cov(X_t, X_s) =$ NON LO SO!

3. $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ calcolare $E(X_t)$ e $cov(X_t, X_s)$

$E(X_t) = \alpha E(X_{t-1}) \qquad cov(X_t, X_s) =$ NON LO SO!

LEZ 7 PARTE 2 min 7

DEF La STAZIONARIETÀ di un PROCESSO STOCASTICO può essere definita:

- IN SENSO FORTE: se $P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) = P(X_{t_1+h} \leq x_1, \ldots, X_{t_n+h} \leq x_n)$

  $\hookrightarrow$ $E(X_t) = m$ costante MEDIA

  $Var(X_t) = \sigma^2$ costante VARIANZA

  $\Gamma_X(t,s) = \Gamma_X(t-s)$ COVARIANZA

DIMOSTRO l'ultima riga considerando $m=0$ e $\sigma=1$ senza perdere di generalità:

$$\Gamma_X(t,s) = E(X_t \cdot X_s) = E(X_{t-s} \cdot X_0) = \Gamma_X(t-s, 0) = \Gamma_X(t-s)$$

RICORDA: L'AUTOCORRELAZIONE è la COVARIANZA NORMALIZZATA: $\rho_{X_t} = \dfrac{cov(X_t, X_s)}{\sigma_{X_t} \cdot \sigma_{X_s}}$

- IN SENSO DEBOLE: se sono verificate le seguenti condizioni:
  - il valore atteso è costante e la covarianza dipende solo da $t-s$
  - il momento del secondo ordine converge

NB Stazionarietà a senso forte implica stazionarietà a senso debole ma non viceversa

Per un processo Gaussiano stazionarietà a senso forte e debole coincidono dato che è completamente determinato da media e covarianza.

NB Se il processo è stazionario la media (calcolata sempre su tante realizzazioni) la media della mia variabile aleatoria è la media del processo siccome abbiamo a che fare con un PROCESSO STAZIONARIO $\Rightarrow$ $E(X_t) = m$ costante

In un processo la variabile aleatoria si esprime a t fissato!

Un processo in sintesi è una variabile aleatoria che dipende anche dal tempo (credo)!

NB PROCESSO ERGODICO: se un processo, oltre che essere stazionario è ANCHE ergodico, allora posso dedurre le proprietà statistiche (come media e varianza) da un singolo campione sufficientemente lungo

MEDIE D'INSIEME (o esemble averages): fisso T e lancio più volte la variabile aleatoria ovvero fisso T e calcolo la media di tutte le realizzazioni che ha assunto il processo ma non è sempre calcolabile perché non sempre disponiamo di 'universi paralleli'

MEDIE TEMPORALI (o time averages): media di una singola realizzazione

$\Rightarrow$ Se il processo stocastico è ERGODICO e STAZIONARIO le medie d'insieme possono essere dedotte dalle medie temporali di un unica realizzazione se questa realizzazione è abbastanza lunga!

PROCESSO ERGODICO: il processo è ergodico nel momento in cui due variabili che sono lontane all'interno del processo sono fondamentalmente indipendenti ovvero significa che il processo non ha una memoria molto forte ovvero che i valori che il processo può assumere non sono