Ragionamento e teoria della scienza

Modulo I: Introduzione alla logica   Prof. Marcello Frixione

Logica proposizionale

Un **ragionamento** o **inferenza** è formato da un certo numero di **premesse**, alle quali segue una **conclusione**. Un'inferenza è una sequenza finita di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle premesse e il cui scopo è ottenere nuova conoscenza. La regola di inferenza è il procedimento applicato per passare dalle premesse alla conclusione.

Premesse e conclusione sono espressioni di un linguaggio naturale (lingue parlate quotidianamente) o artificiale (informatico, simbolico ecc.) Esse sono chiamate **enunciati** o **proposizioni** e si definiscono come espressioni per cui ha senso chiedersi se sono vere o false, possono quindi avere un valore di verità. Di conseguenza non sono enunciati espressioni come domande, ordini, preghiere o espressioni linguistiche incomplete.

Normalmente enunciato e proposizione sono usati come sinonimi, ma essendo precisi, il primo si può definire come nozione sintattica, mentre la seconda come nozione semantica.

- **Sintassi**: si riferisce alla concatenazione delle parti del linguaggio, considerandolo come pure espressioni prive di significato.
- **Semantica**: si riferisce al significato che si assegna alle espressioni linguistiche. Sono nozioni semantiche per esempio la sinonimia e i valori di vero e falso.

Enunciati diversi possono esprimere la stessa proposizione:

Es. Manca un quarto alle 6/ Sono le 6 meno un quarto   Simboli diversi, ma stesso significato

La neve è bianca/ The snow is white

Lo stesso enunciato può avere 2 significati:

Es. Tutti i marinai amano una ragazza (La stessa ragazza amata da tutti/ Una ragazza per ciascuno).

In questo caso l'enunciato risulta ambiguo, si parla quindi di **ambiguità**, la quale caratterizza tutte le lingue naturali. Il linguaggio artificiale è infatti costruito al fine di eliminare le ambiguità. In casi di enunciati ambigui, nel linguaggio quotidiano il contesto ci aiuta a capire l'interpretazione corretta.

Tipi di ragionamento

1. **Ragionamento deduttivo**: se le premesse sono vere, la conclusione sarà vera. Da premesse vere segue in ogni caso una conclusione vera, si dice quindi che la conclusione è conseguenza logica delle premesse.

Es. P-Tutti gli uomini sono mortali	P-Genova è in Piemonte o in Liguria
P-Socrate è un uomo	P-Genova non è in Piemonte
C-<u>Socrate è mortale</u>	C- <u>Genova è in Liguria</u>

2. **Ragionamento induttivo:** Si generalizza a tutti gli individui di un insieme quanto stabilito di una parte di essi. Non si ha mai la certezza di ottenere una conclusione vera, c'è sempre rischio di errore, poiché la premessa può essere falsa.

Es. P-Tutti i corvi osservati fino ad ora sono neri

C-Tutti i corvi sono neri — Non ho visto tutti i corvi, non posso essere sicuro.

3. **Ragionamento abduttivo**: da un certo numero di sintomi o indizi si cerca di trovare una spiegazione (ragionamento diagnostico del medico e dell'investigatore). Anche qui c'è sempre rischio di errore.

Es. P-Se manca la benzina la macchina non parte

P-La macchina non parte

C- (Forse) Manca la benzina — Potrebbe essere un altro problema

4. **Ragionamento per default**: si ottiene una conclusione su un singolo partendo da una conoscenza generale che ammette eccezioni. Si assume qualcosa per default:

Es.P-Titti è un uccello

C-Titti vola — Ma Titti potrebbe essere un pinguino e quindi non volare.

Ragionamento deduttivo

Se le premesse sono false, la conclusione può essere vera o falsa.

Es. P-Tutti i cinesi sono fenicotteri

P-Tutti i fenicotteri sono asiatici

C-Tutti i cinesi sono asiatici — Premesse sbagliate ma conclusione vera

Altri esempi di ragionamenti deduttivi:

P-Marco è architetto o ingegnere	P-3 è pari o primo
P-Marco non è architetto	P-3 non è pari
C-Marco è ingegnere	C-3 è primo

Inferenze di questo tipo si dicono **valide** o **deduttivamente corrette**, ovvero indipendentemente dal contenuto delle premesse, la conclusione segue logicamente da esse. Che siano deduttivamente corretti dipende dalla struttura e non dal contenuto. Si può notare che i ragionamenti dei due esempi hanno una simile struttura, si può quindi estrarre uno schema generale di inferenza deduttivamente corretta:

P-**A o B** (disgiunzione)

P-**Non A** (negazione)

C-**B**

Strutture di questo tipo sono dette **forme logiche**.

Le lettere A e B sono dette **lettere enunciative** o **proposizionali**.

Enunciati semplici e complessi

- **Enunciati semplici**: non si possono scomporre, non comprendono altri enunciati al loro interno.

Es. Genova è in Liguria.   Tutti gli uomini sono canguri.   2+2=4   Piove

- **Enunciati complessi:** constano di parti che sono a loro volta enunciati.

Es. Genova è in Liguria o in Piemonte: G. è in Liguria/ G. è in Piemonte

Non piove: Piove/ non piove

Marco è genovese e ingegnere: Marco è genovese/ Marco è ingegnere

Tavole di verità e connettivi vero-funzionali

Per costruire delle formule logiche mediante le lettere proposizionali, si usano i **connettivi vero-funzionali**.

I connettivi sono espressioni del linguaggio con cui si ottiene una proposizione composta a partire da una o più di esse. Un connettivo si dice vero-funzionale se il valore di verità della proposizione a cui si applica dipende solo dai valori di verità assegnati alle lettere proposizionali. Per determinare il valore di verità di un enunciato scritto tramite una formula logica si utilizzano le **tavole di verità**. I connettivi principali sono:

- **$\wedge$**: congiunzione “e”
- **V**: vel (“oppure”, disgiunzione inclusiva: una cosa non esclude l’altra)
- $\rightarrow$: se allora (condizionale materiale)
- $\leftrightarrow$: se e solo se(bicondizionale)
- $\neg$: non (negazione)

Quest’insieme di connettivi è detto **base di connettivi**, poiché mediante questi è possibile ottenere tutti gli altri.

Tavole di verità dei connettivi:

A B	**$\wedge$**	**V**	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
V V	V	V	V	V
V F	F	V	F	F
F V	F	V	V	F
F F	F	F	V	V

A	**$\neg$**
V	F
F	V

Un’altra base di connettiviè: { $\neg$, $\wedge$, V, $\rightarrow$}.

Infatti: $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ Facendo la tavola di verità troviamo gli stessi valori di $\leftrightarrow$ sotto la $\wedge$.

A B	**A**	$\rightarrow$	**B**	**$\wedge$**	**B**	$\rightarrow$	**A**
V V	V	V	V	V	V	V	V
V F	V	F	F	F	F	V	V
F V	F	V	V	F	V	F	F
F F	F	V	F	V	F	V	F

Per prima cosa si trascrivono i valori di verità delle lettere proposizionale, poi si procede assegnando i valori ai connettivi tenendo a mente le loro tavole di verità, fino ad arrivare al connettivo principale, che indicherà il valore di verità della formula. Per fare questo bisogna tener conto delle parentesi, procedendo come in un'espressione matematica. Nei casi in cui non ci siano parentesi, l'ordine di priorità dei connettivi è:{ **¬**, **∧** e **V**, →, ←→}.

Il numero delle righe in una tavola di verità ha una crescita di tipo **esponenziale**, infatti ogni lettera proposizionale in più comporta un raddoppiamento del numero dei casi.

Tautologie e contraddizioni

Le tautologie sono formule il cui valore di verità è sempre vero, esse non danno per questo informazioni sul mondo, sono ovvietà, verità logiche. Costruendo la tavola di verità di queste formule, si avrà sempre valore vero sotto al connettivo principale. Alcuni esempi sono:

- **Principio di non contraddizione**: uno stesso enunciato non può essere vero o falso allo stesso tempo. **$\neg(A \wedge \neg A)$**

A	**¬**	**A**	**∧**	**¬**	**A**
V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F

Principio del terzo escluso: un enunciato o è vero o è falso, non c'è una terza possibilità. **$A \vee \neg A$**

A	**A**	**V**	**¬**	**A**
V	V	V	F	V
F	F	V	V	F

Queste sono entrambe leggi della logica classica, nella quale vale il **principio di bivalenza**, ovvero esistono solo due valori vi verità(vero o falso).

Altre tautologie:

- **Legge della doppia negazione: $A \leftrightarrow \neg\neg A$** (Il $\leftrightarrow$ è il connettivo principale di molte tautologie, esso fa sì che il valore di verità di una parte sia uguale a quello dell'altra.)
- **Legge della commutatività di ∧: $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$**
- **Legge dell'associatività di ∧ e di V: $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$**
- **Leggi di de Morgan: $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$**
- **Proprietà distributiva di ∧ rispetto a V: $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$**

$A \wedge \neg A \rightarrow B$ se l'antecedente è falso il → è sempre vero

Le tautologie sono infinite, poiché in un V basta che una parte sia vera perché la formula lo sia: **$\neg(A \wedge \neg A) \vee \ldots$**

Le contraddizioni sono invece formule il cui valore di verità è sempre falso. Alcuni esempi sono:

- **$A \wedge \neg A$**

- **A←→¬A**

A	A	∧	¬	A
V	V	F	F	V
F	F	F	V	F

A	A	←→	¬	A
V	V	F	F	V
F	F	F	V	F

Qualunque tautologia con ¬ davanti è una contraddizione: **¬(A∧¬A)**

Da una contraddizione può seguire qualunque cosa, infatti la formula **A∧¬A→B** è una tautologia (**legge di Scoto**).

Alcuni tipi di ragionamento deduttivamente corretto:

A→B **Modus ponens** **A→B** **Modus tollens**

A **¬B**

<u>B</u> **<u>¬A</u>**

Alcuni esempi di fallacia:

Fallacia: ragionamento ingannevole, sembra giusto, ma è errato. La conclusione non segue logicamente dalle premesse.

A→B **Fallacia dell'affermazione del conseguente** **A→B** **Fallacia della negazione dell'antecedente**

B **¬A**

<u>A</u> **<u>¬B</u>**

Per verificare che un ragionamento è deduttivamente errato basta un contro-esempio, viceversa servono infiniti esempi positivi.

Conseguenza logica

x è conseguenza logica di y sse(se e solo se) ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali che renda vera y rende vera anche x. (Ogni volta che è vera x è vera anche y). Si tratta di una relazione tra formule.

X è conseguenza logica di y sse y→x (tautologia)

Ogni tautologia che ha → come connettivo principale ha y come conseguenza logica di x. (→con antecedente falso è sempre vero).

B è c.l. di A∧B sse A∧B→B è una tautologia

A B	A	∧	B	→	B

V V	V	V	V	V	V
V F	V	F	F	V	F
F V	F	F	V	V	V
F F	F	F	F	V	F

x è c.l. di y sse y→x è una tautologia

x è c.l. di y(1)…y(n) sse ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali che rende vere y(1)…y(n) rende vera anche x. X può essere c.l. di più formule: x è c.l. di y(1)…y(n) sse y(1)∧…∧y(n)→x è una tautologia.

Per verificare se c'è conseguenza logica:

1)**A→B**   2)**B è c.l. di A→B∧A sse (A→B)∧A→B è una tautologia**

A

B

A B	**A**	**→**	**B**	**∧**	**A**	**→**	**B**
V V	V	V	V	V	V	V	V
V F	V	F	F	F	V	V	F
F V	F	V	V	F	F	V	V
F F	F	V	F	F	F	V	F

Equivalenza logica

X è logicamente equivalente ad y sse ogni assegnazione dei valori di verità alle lettere proposizionali che rende vera x rende vera anche y e viceversa. (Conseguenza logica reciproca).

X è log.eq. a y sse x←→y è una tautologia.   ←→ indica un'equivalenza logica. Ogni equivalenza logica sono due conseguenze logiche.

Linguaggio oggetto e metalinguaggio

- **Metalinguaggio**: linguaggio per parlare del linguaggio oggetto.
- **Linguaggio oggetto**: linguaggio di cui si parla, studiato dalla disciplina.

Le lingue naturali non distinguono nettamente tra i due:

Si può parlare della lingua stessa (Luca èun nome)

Dispongono dei predicati vero e falso (Ciò che ha detto Luca è vero)

Ci sono enunciati che parlano di sé stessi (Questa è una frase)

Nel linguaggio naturale si trovano inoltre dei **paradoss**i, ovvero enunciati che non possono essere né veri né falsi, c'è sempre una contraddizione.

Paradosso del mentitore: Questo enunciato è falso (se è vero è falso, se è falso è vero).

Enunciati di questo tipo sono detti **antinomie**, portano sempre una contraddizione.

La logica fa in modo di distinguere tra linguaggio oggetto e metalinguaggio per evitare contraddizioni.

Sse: metalinguaggio ←→: linguaggio oggetto

Paradossi

Paradosso: ragionamento che parte da premesse accettabili, che si sviluppa in modo apparentemente corretto, ma che porta ad una conclusione non accettabile.

Paradosso dell'uomo calvo o paradosso del sorite:

P-Chi ha 0 capelli è calvo Da un enunciato si arriva ad una contraddizione

P-Se ha un calvo si aggiunge un capello resta calvo

C-<u>Chiunque è calvo</u>

Paradosso del barbiere: "Io rado tutti quelli che non si radono da soli, non rado tutti quelli che si radono da soli". (Chi rade il barbiere?)

Possibilità: o c'è una premessa falsa, o c'è un errore di ragionamento, o dobbiamo accettare la conclusione.

Alcune regole di inferenza

P-**A→B** **Regola di concatenazione** P- **AVB** **Sillogismo disgiuntivo**

P-**B→C** P-**¬B**

C-<u>**A→C**</u> C-<u>**A**</u>

P-**A→B** **Regola di contrapposizione** P- **A∧B** **Regola dell'eliminazione della congiunzione**

C-<u>**¬B→¬A**</u> C-<u>**A**</u>

P-**A** **Regola dell'introduzione del vel**

C-<u>**AVB**</u>

Logica dei predicati

Non si può creare uno schema di un ragionamento formato da enunciati semplici, per capire se è corretto bisogna smontare la struttura interna degli enunciati semplici.

Per la logica proposizionale questi enunciati sono solo scatole nere, con la logica dei predicati è invece possibile scomporli e formalizzarli.

- **Enunciati semplici del primo tipo:**

Si parla sempre di un oggetto specifico, un predicato a n argomenti è attribuito a n individui.

Es. Fido canta   2 è primo $2<4$ Marco è cugino di Anna

- **Enunciati semplici del secondo tipo:**

Si parla in generale.

Es. Tutti gli uomini sono mortali   Gli asini volano   Qualche gatto miagola   Anna ha un figlio

Formalizzare un enunciato semplice del primo tipo

Per definire un oggetto specifico si usano le **costanti individuali**, le quali vengono indicate da lettere minuscole.

Le **proprietà** sono cose che si possono predicare di un individuo (aggettivi, forme verbali intransitive e nomi comuni), queste si indicano con lettere maiuscole.

Es. Fido canta: **Ca**   (il predicato viene prima dell'oggetto)

Le **relazioni** vengono anch'esse indicate con lettere maiuscole e possono essere a due o più argomenti.

Es. Mario è cugino di Anna: **Cma**

Napoli è tra Salerno e Roma: **Tnsr**

Proprietà e relazioni sono **predicati**.

Formalizzare un enunciato semplice del secondo tipo

Si usano i **quantificatori**, le **variabili individuali**, i **predicati**, i **connettivi** e le **parentesi**.

Quantificatore universale: $\forall$
Quantificatore esistenziale: $\exists$

Variabili individuali: minuscole tra le ultime dell'alfabeto (x,y,z)

Un quantificatore agisce sempre su una variabile.

Es. Tutti gli uomini sono mortali: $\forall x(Ux \rightarrow Mx)$ (Per ogni x, se x è un uomo, x è mortale.)

Premesse dei sillogismi aristotelici

- **Universali affermative: Tutti i P sono Q** $(\forall x(Px \rightarrow Qx))$
- **Particolari affermative: Qualche P è Q** $(\exists x(Px \wedge Qx))$
- **Universali negative: Nessun P è Q** $(\neg \exists X(Px \wedge Qx))$ **oppure** $(\forall x(Px \rightarrow \neg Qx))$
- **Particolari negative: Qualche P non è Q** $(\exists x(Px \wedge \neg Qx))$

Altri esempi:

I fratelli di Anna sono belli: $\forall x(Fxa \rightarrow Bx)$ (Per ogni x, se x è fratello di Anna, x è bello)
Marco ama Anna: **Ama** (prima chi ama)

Relazione simmetrica (Marco ama Anna e Anna ama Marco): **$Ama \wedge Aam$**

Marco ama qualcuno: **$\exists x(Amx)$**

Marco è amato da qualcuno: **$\exists x(Axm)$**

Anna ama tutti: **$\forall x(Aax)$**
Tutti amano qualcuno: **$\forall x \exists y(Axy)$**
Qualcuno è amato da tutti: **$\exists x \forall y(Ayx)$**
Tutti i marinai amano una ragazza:

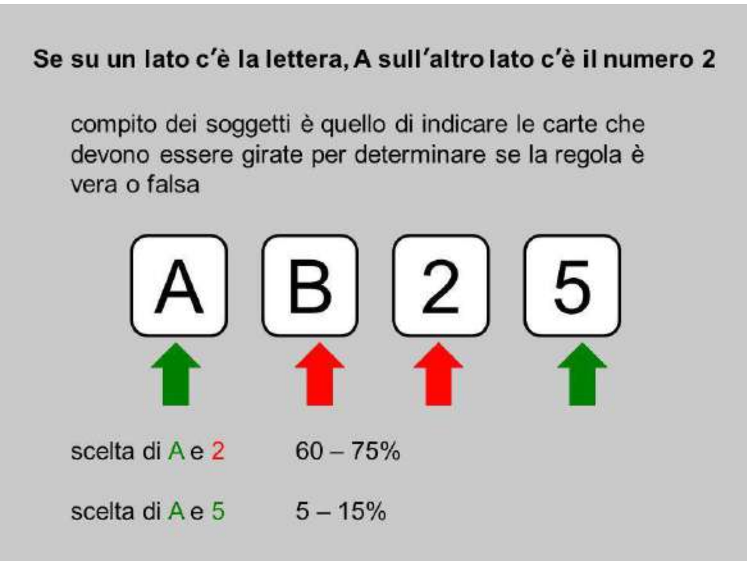
Una ragazza amata da tutti **(lettura de re): $\exists x(Rx \wedge \forall y(My \rightarrow Ayx))$**
Diverse ragazze **(lettura de dicto): $\forall y(My \rightarrow \exists x(Rx \wedge Ayx))$**
Transitività: $\forall x \forall y \forall z(Axy \wedge Ayz \rightarrow Axz)$
Simmetria: $\forall x \forall y(Axy \leftrightarrow Ayx)$
Riflessività: $\forall x Axx$
Una variabile si dice vincolata se si trova nel raggio d'azione di un quantificatore.

Px: variabile libera **$\forall x Px$: variabile vincolata**

Psicologia del ragionamento

La psicologia del ragionamento ha un intento descrittivo, indica come gli uomini ragionano davvero. La logica ha invece un intento normativo e indica come gli uomini dovrebbero ragionare.

Esistono degli errori sistematici che colpiscono tutti e sono difficili da correggere. In questi casi tutti sbagliano nello stesso modo, così come nelle illusioni percettive. Questi errori sono chiamati **illusioni cognitive** (un esempio è l'esperimento delle 4 cartedi Wason). Gli uomini non sono ragionatori formali, per noi il contenuto fa la differenza.



Esperimento delle 4 carte

Forme grammaticalmente simili portano a forme logiche diverse:

Fido è un cane: **Cf** / Un bassotto è un cane: **$\forall x(Bx \rightarrow Cx)$** / 8 è la somma di 6 e 2: **$8=6+2$**
Marco e Giorgio sono genovesi: **$Gm \wedge Gg$** / Marco e Giorgio sono fratelli: **Fmg**

Fallacie derivanti dal linguaggio

- **Equivocatio**: equivoco a livello semantico, a causa di una parola ambigua.

P-Gli uomini sono gli unici esseri dotati di ragione

P-Le donne non sono uomini

C-Le donne non sono dotate di ragione

- **Anfibolia**: equivoco a causa di una premessa ambigua. Essa può dare spazio a due diverse inrterpretazioni in alcuni casi(de re e de dicto). La conclusione segue dall'interpretazione sbagliata.

P-C'è un numero maggiore di ciascun numero

C-C'è un numero maggiore di sé stesso

Quando ragioniamo diamo per scontato molte informazioni che non esplicitiamo. Nel ragionamento logico tutto va reso esplicito.

- **Petitio principii** (circolo vizioso): la coclusione è già implicita nelle premesse, per concludere, assumo già ciò che voglio dimostrare.

P-La Bibbia dice che Dio esiste

P-La Bibbia non può mentire perché è la parola di Dio

C-Dio esiste

Pragmatica

Uso delle parole in un contesto, studio della conversazione (interazione linguistica, fenomeno collaborativo).

Paul Grice è considerato il padre della pragmatica, egli elaborò 4 massime della conversazione, ovvero norme che chi partecipa alla conversazione si spetta che l'altro rispetti.

1. **Massima della quantità**: bisogna comunicare una quantità adeguata di informazioni, non bisogna essere né troppo reticenti, né dire troppo.
2. **Massima della qualità**: non bisogna comunicare informazioni che si sa essere false o della cui verità non si è sicuri.
3. **Massima della relazione:** l'informazione comunicata deve essere pertinente.
4. **Massima del modo**: bisogna usare un linguaggio adeguato al contesto ell'interlocutore, inoltre bisogna esprimersi in modo ordinato evitando ripetizioni e oscurità.

Es. P-Marco è genovese

C- Marco è genovese o Lima è in Venezuela

Questo ragionamento è deduttivamente corretto, ma inaccettabile pragmaticamente, esso infatti viola la massima della relazione e quella della quantità, perché dice troppo poco, infatti so di più se so che Marco è genovese, che se so questo o che Lima è in Venezuela. La petitio principii è un errore pragmatico, non logico, non produce nuova conoscenza.