MATEMATICA FINANZIARIA

La matematica finanziaria studia i modelli matematici necessari per risolvere operazioni (dette **operazioni finanziarie**) di scambio che si protraggono nel tempo ed hanno per oggetto importi monetari. Esistono due tipi di operazioni finanziarie:

1. **Operazioni di investimento**: un soggetto impiega il capitale C per un certo periodo di tempo e da tale impiego ricava un montante M:

$$M = C + I$$

   L'**interesse** I rappresenta il compenso per l'uso del capitale dall'istante t_1 all'istante t_2.

2. **Operazioni di finanziamento**: un soggetto incassa il capitale C con l'obbligo di pagare un montante M ad una determinata scadenza futura.

N.B: si utilizza € come unità di misura del capitale e gli **anni** come unità di misura per il tempo (quindi, per es., 2 mesi corrispondono a 2/12 anni).

Distinguiamo:

- **Contratto a pronti**: quando all'istante s viene fatto un accordo fra due parti, accordo secondo il quale il capitale è subito messo a disposizione (investito) e gli interessi decorrano dall'istante s all'istante t_2;
- **Contratto a termine**: quando all'istante s viene fatto un accordo fra due parti, accordo secondo il quale il capitale è messo a disposizione (investito) in t_1 ($t_1 > s$), e gli interessi decorrono dall'istante t_1 all'istante t_2.

Legge finanziaria di interesse: $F = (C, t_1, t_2)$

Legge di interesse F uniforme nel tempo: $F(C, t_1, t_2) = F(C, t_1 + x, t_2 + x)$

Legge di interesse F additiva rispetto al capitale: $F(C_1 + C_2, t_1, t_2) = F(C_1, t_1, t_2) + F(C_2, t_1, t_2)$, le sole funzioni che soddisfano questa legge sono del tipo: $F(C, t_1, t_2) = Cf(t_1, t_2) - C = C(f(t_1, t_2) - 1)$.

Legge finanziaria di capitalizzazione: $\Phi = (C, t_1, t_2)$, proprietà della funzione Φ:

- $\Phi(0, t_1, t_2) = 0$;
- $\Phi(C, t, t) = C$;
- $\Phi(C, t_1, t_2) < \Phi(C, t_1, t_3)$: perché più in là vado più il montante aumenta;
- $\Phi(C_1, t_1, t_2) < \Phi(C_2, t_1, t_2)$.

Legge di capitalizzazione **Φ** uniforme nel tempo: $\Phi(C, t_1, t_2) = \Phi(C, t_1 + x, t_2 + x)$

Legge di capitalizzazione **Φ** additiva rispetto al capitale: $\Phi(C_1 + C_2, t_1, t_2) = \Phi(C_1, t_1, t_2) + \Phi(C_2, t_1, t_2)$, le sole funzioni che soddisfano questa legge sono del tipo: $\Phi(C, t_1, t_2) = Cf(t_1, t_2)$, dove $f(t_1, t_2)$ si chiama **fattore di capitalizzazione** da t_1 a t_2.

Proprietà della funzione f:

- $f(t_1, t_1) = 1 \; \forall t > 0$;
- $f(t_1, t_2) < f(t_1, t_3)$;
- $f(t_1, t_2) > 1 \; \forall t_1, t_2, 0 < t_1 < t_2$.

Legge di capitalizzazione Φ additiva rispetto al capitale e uniforme nel tempo:

- Uniforme nel tempo: $\Phi(C, t_1, t_2) = M(C, t)$ (può essere scritta così se $t = t_2 - t_1 > 0$);
- Additiva rispetto al capitale: $\Phi(C, t_1, t_2) = Cf(t_1, t_2)$

$$M(C, t) = Cf(t_1, t_2) \rightarrow f(t_1, t_2) = \frac{M(C, t)}{C} = K(t)$$

Quindi: $M = CK(t)$ e $I = CK(t) - C = C(K(t) - 1)$. Posto però $K(t) - 1 = k(t)$, ottengo:

$$M = C(1 + k(t))$$
$$I = Ck(t)$$

Una **legge di capitalizzazione Φ è scomponibile** se soddisfa la seguente equazione: $\Phi(C, t_1, t_2) = \Phi(\Phi(C, t_1, z), z, t_2)$, cioè il montante in t_2 del capitale investito in t_1 non muta se in qualunque istante z ($t_1 < z < t_2$) si disinveste il montante ottenuto in z e lo si reinveste per il periodo restante che va da z a t_2.

Una **legge di capitalizzazione Φ è scindibile** se è additiva rispetto al capitale e scomponibile:

- Additiva rispetto al capitale: $\Phi(C, t_1, t_2) = Cf(t_1, t_2)$;

- Scomponibile: $\Phi(C, t_1, t_2) = \Phi(\Phi(C, t_1, z), z, t_2)$;

$$Cf(t_1, t_2) = Cf(t_1, z)f(z, t_2) \rightarrow f(t_1, t_2) = f(t_1, z)f(z, t_2)$$

Le funzioni che soddisfano questa legge sono del tipo:

$$\Phi(C, t_1, t_2) = Cf(t_1, t_2) = Ce^{\int_{t_1}^{t_2} \rho(z)dz}$$

REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE

Ipotesi finanziaria: consideriamo una legge di interesse additiva rispetto al capitale e uniforme nel tempo. Abbiamo quindi:

$$I(C, t) = Ck(t)$$

Ipotizziamo che l'interesse sia direttamente proporzionale alla durata t: $I(C, t) = Ck(t) = Cit$, dove i è il **tasso annuo di interesse** che misura l'interesse prodotto dall'unità di capitale (1 euro) nell'unità di tempo (1 anno). Da questa formula abbiamo:

- Legge di interesse semplice: $I(C, t) = Cit$;
- Legge di capitalizzazione semplice: $M(C, t) = C(1 + it)$, da questa:
  1) Posto $C = 1$: $M(1, t) = 1 + it \rightarrow$ **fattore di capitalizzazione semplice**;
  2) Posto $C = 1, t = 1$: $M(1,1) = 1 + i \rightarrow$ **fattore annuo di capitalizzazione**.

Interesse e montante quando il tasso i è costante

Interesse e montante quando il tasso i non è costante:

- Interesse quando i non è costante:

$$I = C\sum_{s=1}^{r} i^s \times t_s$$

$s = 1,2,3, \dots, r$ sono i tassi annui di interesse relativi ai periodi di ampiezza $t_1, t_2, \dots, t_r$.

- Montante quando i non è costante:

$$M = C + I = C\left(1 + \sum_{s=1}^{r} i^s \times t_s\right)$$

$s = 1,2,3, \dots, r$ sono i tassi annui di interesse relativi ai periodi di ampiezza $t_1, t_2, \dots, t_r$.

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Definizione: consideriamo una legge di capitalizzazione additiva rispetto al capitale e uniforme nel tempo, quindi:

$$I(C, t) = Ck(t)$$
$$M(C, t) = C(1 + k(t))$$

Assumiamo che il capitale C sia impiegato per una durata $n = n_2 - n_1$, quindi:

$$I(C, n) = Ck(n)$$
$$M(C, n) = C(1 + k(n))$$

Fissiamo un tasso annuo di interesse i costante e ipotizziamo quanto segue:

a. Per qualunque anno l'interesse prodotto da un capitale impiegato per un anno è calcolato secondo la legge della capitalizzazione semplice;
b. Alla fine di ogni anno della durata n, l'interesse prodotto dal capitale impiegato all'inizio dello stesso anno viene aggiunto al capitale impiegato, così il montante ottenuto viene totalmente reimpiegato.

Determiniamo la legge di capitalizzazione conseguente alle ipotesi appena formulate:

- Dopo un anno dall'impiego del capitale, per l'ipotesi (a) e per la formula $M(C, t) = C(1 + it)$, ottengo:

$$M(C, 1) = C(1 + i)$$

- Dopo un altro anno, per l'ipotesi (a) e l'ipotesi (b), ottengo:

$$M(C, 2) = C(1 + i)^2$$

In conclusione troviamo le seguenti leggi:

- Legge di capitalizzazione composta:

$$M(C, n) = C(1 + i)^n$$

Se $C = 1$: $M(1, n) = (1 + i)^n \rightarrow$ **fattore di capitalizzazione composta**
Se $C = 1$ e $n = 1$: $M(1,1) = (1 + i) \rightarrow$ **fattore annuo di capitalizzazione**

- Legge di interesse composto:

$$I(C, n) = C((1 + i)^n - 1)$$

Interesse e montante quando i non è costante:

- Interesse quando i non è costante:

$$I = C\left(\prod_{s=1}^{r}(1+i^{s})^{ns} - 1\right)$$

$s = 1,2,3, \dots, r$ sono i tassi annui di interesse relativi ai periodi di ampiezza $n_1, n_2, \dots, n_r$ e n sono gli anni.

- Montante quando i non è costante:

$$M = C\prod_{s=1}^{r}(1+i^{s})^{ns}$$

$s = 1,2,3, \dots, r$ sono i tassi annui di interesse relativi ai periodi di ampiezza $n_1, n_2, \dots, n_r$ e n sono gli anni.

Investimento di durata non intera in regime di capitalizzazione composta: se n non è un numero intero di anni, se cioè

$$n = n_0 + p$$
$$n_0 = [n]$$

Il montante può essere calcolato tramite due tipi di convenzione:

- Convenzione esponenziale:

$$M = C(1+i)^{n_0} \times (1+i)^{p}$$

- Convenzione mista:

$$M = C(1+i)^{n_0} \times (1+ip)$$

Il montante prodotto con la convenzione esponenziale è < del montante prodotto con la convenzione mista.

Tassi di interesse equivalenti: quando applicati allo stesso capitale e per la stessa durata conducono allo stesso montante:

CASO A: relazione tra il tasso i_1 (in regime di capitalizzazione semplice) e il tasso i_2 (in regime di capitalizzazione composta):

- Se n è intero:

$$1 + i_1 n = (1+i_2)^{n}$$

- Se n non è intero:

$$(1 + i_1(n_0 + p)) = (1+i_2)^{n_0}(1+i_2 p)$$

CASO B: relazione di equivalenza tra i e $i_{1/k}$ in regime di interesse semplice:

$$i = k \times i_{1/k}$$

CASO C: relazione di equivalenza tra i e $i_{1/k}$ in regime di capitalizzazione composta:

- Se n è intero applico la convenzione esponenziale:

$$1 + i = (1 + i_{1/k})^{k}$$

- Se n non è intero applico la convenzione mista:

$$(1+i)^{n_0}(1+ip) = \left(1+i_{1/k}\right)^{n_0}(1+i_{1/k}p)$$

Tasso annuo nominale convertibile k volte l'anno:

$$J(k) = k\left((1+i)^{1/k} - 1\right)$$

Mi trovo in regime di capitalizzazione composta e il tasso annuo effettivo i e il tasso nominale $J(k)$ si dicono corrispondenti.

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE CONTINUA

Il montante del capitale C impiegato in regime di capitalizzazione continua dall'istante 0 all'istante t a tasso annuo istantaneo $\rho(s) > 0$ è:

$$M = Ce^{\int_0^t \rho(s)ds}$$

Il montante del capitale C impiegato in regime di capitalizzazione continua dall'istante t_1 all'istante t_2 a tasso annuo istantaneo $\rho(s) > 0$ è:

$$M = Ce^{\int_{t_1}^{t_2} \rho(s)ds} = Ce^{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}$$

$\varphi(t)$: fattore logaritmo di capitalizzazione da 0 a t
$e^{\varphi(t)}$: fattore di capitalizzazione continua da 0 a t
$e^{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}$: fattore di capitalizzazione continua da t_1 a t_2

Il montante del capitale C impiegato in regime di capitalizzazione continua dall'istante 0 all'istante t a tasso annuo istantaneo $\delta < 0$ è:

$$M = Ce^{\delta t}$$

Il montante del capitale C impiegato in regime di capitalizzazione continua dall'istante t_1 all'istante t_2 a tasso annuo istantaneo $\delta < 0$ è:

$$M = Ce^{\delta(t_2-t_1)}$$

Tasso medio (δ^*): tasso istantaneo e costante nel tempo. Si calcola:

$$\delta^* = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Tasso centrale (δ_t):

$$\delta_t = \varphi(t) - \varphi(t-1)$$

LEGGI DI SCONTO

Indichiamo con V il valore dello sconto e con S lo sconto sul capitale:

$$S = C - V$$
$$V = C - S$$
$$C = V + S$$

Le proprietà minime della funzione V:

- $V(0, t_1, t_2) = 0$
- $V(C, t_1, t_1) = C$
- $V(C, t_1, t_2) > V(C, t_1, t_3)$
- $V(C_1, t_1, t_2) < V(C_2, t_1, t_2)$
- $V(C, t_1, t_2) > 0$ se $C > 0$

Legge di sconto uniforme nel tempo: $V(C, t_1, t_2) = V(C, t_1 + x, t_2 + x)$

Legge di sconto additiva rispetto al capitale: $V(C_1 + C_2, t_1, t_2) = V(C_1, t_1, t_2) + V(C_2, t_1, t_2)$, derivando otteniamo $V(C, t_1, t_2) = Cg(t_1, t_2)$, dove g è il fattore di sconto e le sue proprietà sono:

- $g(t_1, t_1) = 1;$
- $g(t_1, t_2) > g(t_1, t_3);$
- $g(t_1, t_2) > 0.$

Legge di sconto additiva rispetto al capitale e uniforme nel tempo:

$$V = CH(t)$$
$$S = C(1 - H(t)) = Ch(t)$$

Una legge di sconto è scomponibile se soddisfa la seguente equazione: $V(C, t_1, t_2) = V(V(C, z, t_2)t_1, z)$

Una legge di sconto è scindibile se è additiva rispetto al capitale e scomponibile: $V(C, t_1, t_2) = Cg(t_1, t_2) = Ce^{-\int_{t_1}^{t_2} \rho(z)dz}$

Sconto commerciale: consideriamo una legge di sconto additiva rispetto ai capitale e uniforme nel tempo:

$$S = Ch(t) = Cdt$$
$$V = C - S = C - Cdt = C(1 - dt)$$

$(1 - dt) \rightarrow$ fattore di sconto commerciale
$(1 - d) \rightarrow$ fattore annuo di sconto

Relazione di equivalenza tra d e $d_{1/k}$ in regime di sconto commerciale: $d = k \times d_{1/k}$

Sconto composto: consideriamo una legge di sconto additiva rispetto al capitale e uniforme nel tempo:

$$V = C(1 - d)^n$$
$$S = C(1 - (1 - d)^n)$$

$(1 - d)^n \rightarrow$ fattore di sconto composto
$(1 - d) \rightarrow$ fattore annuo di sconto

Relazione di equivalenza tra d e $d_{1/k}$ in regime di sconto composto: $1 - d = (1 - d_{1/k})^k$

Relazione di corrispondenza tra d e d_k: $d_k = k[1 - (1 - d)^{1/k}]$

Il tasso annuo di sconto d e il tasso annuo di interesse i si dicono corrispondenti perché sono legati dalla seguente relazione:

$$1 - d = (1 + i)^{-1}$$

Si è soliti indicare:

- $u = (1 + i) \rightarrow$ fattore annuo di capitalizzazione;
- $v = (1 + i)^{-1} = u^{-1} = \frac{1}{u} \rightarrow$ fattore annuo di attualizzazione.

Dalla relazione di corrispondenza ne viene che: $d = iv$

Leggi di sconto e di capitalizzazione coniugate: si dice che due leggi di capitalizzazione e di sconto additive rispetto al capitale sono coniugate se fra i fattori di capitalizzazione e di sconto vale la relazione:

$$g(t_1,t_2) = \frac{1}{f(t_1,t_2)} \rightarrow f(t_1,t_2) = \frac{1}{g(t_1,t_2)}$$

Quindi nel caso di leggi coniugate la legge di sconto coincide con la legge di attualizzazione.

Sconto razionale: sconto che consente di realizzare l'uguaglianza fra il valore scontato e il valore attuale per qualsiasi t.

- A tasso annuo di interesse i:

$$V = C\frac{1}{1+it}$$

$$S = \frac{Cit}{1+it}$$

- A tasso annuo di sconto d:

$$V = C\frac{1-d}{1-d+dt}$$

$$S = \frac{Cdt}{1-d+dt}$$

RENDITE CERTE

Una **rendita certa** (discreta) è una successione di somme disponibili a scadenze determinate. Le singole somme si chiamano **rate** o **termini della rendita**. Nel caso in cui le rate della rendita sono disponibili a scadenze equidistanti il **periodo** è l'intervallo di tempo tra una scadenza e quella successiva. Distinguiamo tra:

- Una **rendita** è **a rata costante** se le rate sono tutte uguali fra loro ed è unitaria se sono uguali a 1;
- Una **rendita** è **a rate variabili** se le rate non sono tutte uguali fra loro;
- Una **rendita** è **temporanea** o **limitata** se il numero delle rate è finito;
- Una **rendita** è **perpetua** se il numero delle rate è infinito;
- Una **rendita** è **periodica** se sono disponibili a scadenza equidistanti;
- Una **rendita** è **anticipata** se ogni rata è disponibile all'inizio del periodo;
- Una **rendita** è **posticipata** se ogni rata è disponibile alla fine di ogni periodo;
- Una **rendita** è **immediata** se il primo termine è disponibile al principio o alla fine del periodo che ha inizio in quell'istante;
- Una **rendita** è **differita** se il primo termine è disponibile, anticipatamente o posticipatamente, dopo un certo numero di periodi;
- Una **rendita** è **continua** se è disponibile un flusso di pagamenti in un determinato intervallo di tempo.

Valutazione di una rendita:

$$V = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{t-t_s}$$

Dove R_s è il numero delle rate e t_s sono le scadenze.

RENDITE PERIODICHE:

Rendita annua, immediata, posticipata, temporanea per n anni, di rata R:

- Valore attuale:

$$V = R\frac{1-v^n}{i}$$

Se $R = 1$: $a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$

- Valore finale:

$$V = R\frac{u^n-1}{i}$$

Se $R = 1$: $s_{\overline{n}|i} = \frac{u^n-1}{i} = u^n a_{\overline{n}|i}$

Rendita annua, immediata, anticipata, temporanea per n anni, di rata R:

- Valore attuale:

$$V = R\frac{1-v^n}{d}, con\ d = 1-v$$

Se $R = 1$: $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{d} = u a_{\overline{n}|i}$

- Valore finale:

$$V = R\frac{u^n-1}{d}, con\ d = 1-v$$

Se $R = 1$: $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{u^n-1}{d} = u^n \ddot{a}_{\overline{n}|i} =$

$= u^n u a_{\overline{n}|i} = u s_{\overline{n}|i}$