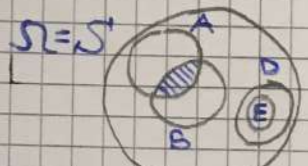
27/02/18

PROBABILITÀ CONDIZIONATA



$P(A/B)$ essendosi verificato B, qual'è la probabilità che si verifichi A

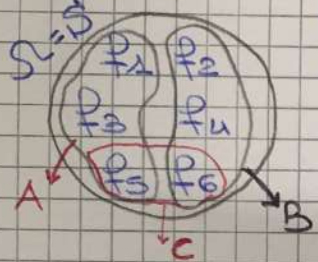
$P(A)$ $P(D)$

$P(B)$ $P(E)$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

$P(AB) = P(A \cap B)$

esp. lancio dado



$P(\Omega) = 1$

$P(\Omega) = P(f_1) + P(f_2) \dots + P(f_6) = 1$

$P(f_i) = 1/6$

B = FACCIA PARI

A = FACCIA DISPARI

C = FACCIA > 4

$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = 0,5$

$A \cup B = \Omega$

$P(A \cup B) = 1$

$$P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33$$

$$(B \cup C) = \{f_2, f_4, f_5, f_6\} = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(C/B) = \frac{P(CB)}{P(B)} = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$$

$$P(B|C) = \frac{P(B) \cdot P(C|B)}{P(C)} \qquad \frac{\frac{1}{2} P(C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$$

$P(B) \to \frac{1}{2}$

Se:

$P(C/B) = P(C)$ (B non condiziona C)

$P(\overset{C \cap B}{CB}) = P(C/B) \cdot P(B) = P(C) \cdot P(B)$

C e B sono tra di loro <u>indipendenti</u>

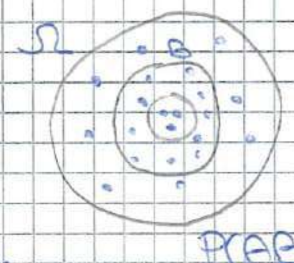
(la prob. del loro prodotto è uguale al prodotto delle loro probabilità) NON SI CONDIZIONANO TRA DI LORO

$$P(B/C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(B)\cdot \cancel{P(C)}}{\cancel{P(C)}} = P(B)$$

A e B sono <u>MUTUAMENTE ESCLUSIVI</u>, infatti ~~[illegible]~~ l'eventualità che si verifichi uno esclude la possibilità che si verifichi l'altro

CARTA DA GIOCO

$4 \times 13 = 52$



$P(\text{ASSO} \blacklozenge) = 1/52$

B = 1 CARTA DI CUORE $\quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

A = FIGURA DI CUORE $\quad P(A) = \frac{3}{52} \cong 0{,}057$

$A \subset B$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A) \qquad \frac{\overset{1}{P(B/A)}\cdot P(A)}{P(B)} = P(A/B)$$

$$P(A/B) = \frac{3/52}{1/4} = \frac{3}{13} \cong 0{,}23$$

$$\boxed{P(B/A)} = \frac{P(BA)}{P(A)} = \boxed{\frac{P(A/B)\cdot P(B)}{P(A)}}$$

Teorema di Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A/B)\cdot P(B)$$

TEO. PROB. TOTALE

$i \neq j \quad B_i \cap B_j = \emptyset$ sono disgiunti

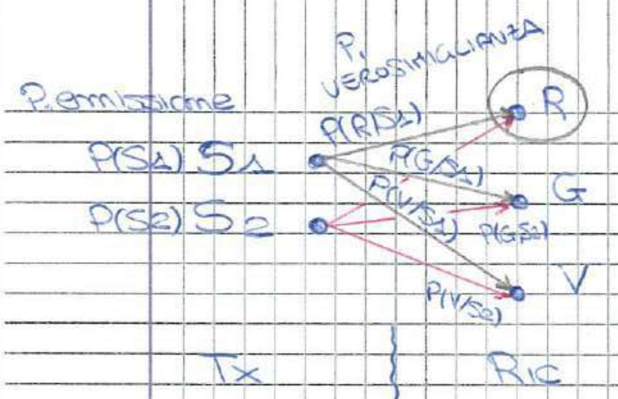
$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_i \cup \ldots B_M = \Omega$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{M} P(\underbrace{A \cap B_i}_{A\cdot B_i}) = \sum_{i=1}^{M} P(A/B_i)\cdot P(B_i)}$$

SUDDIVISO IN SOTTOPROBLEMI CHE NON SI INTERSECANO

Applicazione tipica del Teorema di Bayes in comunicazioni:

$\boxed{\text{Sorg}} \xrightarrow{\{0,1\}} \boxed{\text{TX}} — \boxed{\text{CAN}} — \boxed{\text{RIC}} =$ "0" / "1"



P. A POSTERIORI

$$P(S_1/R) \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} P(S_2/R)$$

Teo. Prob. Totale

$$P(S_1/R) \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} P(S_2/R)$$

$$P(R) = P(R/S_1) \cdot P(S_1) + P(R/S_2) \cdot P(S_2)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{P(R/S_1) \cdot P(S_1)}{P(R)} \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} \frac{P(R/S_2) \cdot P(S_2)}{P(R)}$$

CRITERIO MAP (massimo probabilità A posteriori)

criterio di decisione che minimizza l'errore medio

$\boxed{\text{es.}}$

$P(S_1) = 0{,}6$

$P(S_2) = 0{,}4$

$P(R/S_1) = 0{,}6$ $\quad P(V/S_2) = 0{,}8$

$P(G/S_1) = 0{,}3$ $\quad P(G/S_2) = 0{,}1$

$P(V/S_1) = 0{,}1$ $\quad P(R/S_2) = 0{,}1$

$$P(R) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}36 + 0{,}04 = 0{,}4$$

$$0{,}6 \cdot 0{,}6 \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} 0{,}1 \cdot 0{,}4$$

$$0{,}36 \gtrless 0{,}04$$

$$0{,}36 > 0{,}04 \Rightarrow \overset{\text{DECIDO}}{S_1}$$

- ACCENDO LA VERDE

$$P(S_1/V) \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} P(S_2/V)$$

$$P(S_1/V) = \frac{P(V/S_1) \cdot P(S_1)}{\cancel{P(V)}} \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} \frac{P(V/S_2) \cdot P(S_2)}{\cancel{P(V)}}$$

$$0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06 \gtrless 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32 \Rightarrow \overset{\text{DECIDO}}{S_2}$$

- ACCENDO GIALLO

$$P(S_1/G) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{P(G)} \overset{S_1}{\gtrless} \frac{0{,}1 \cdot 0{,}4}{P(G)} \Rightarrow \text{DECIDO } S_1$$

$P(E)$?

$P(E) = P(E/S_1) \cdot P(S_1) + P(E/S_2)\, P(S_2)$

$= P(V/S_1) \cdot P(S_1) + P(S_2)\left[P(R|S_2) + P(G/S_2)\right]$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}4\left[0{,}1 + 0{,}1\right] = 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}14$ MINIMO ERRORE

CRITERIO OTTIMO $\leftrightarrow$ errore minimo (medio)

es.

1000	500	1000
SC1	SC2	SC3

$P(guasto/SC_1) = 8\%$ $P(guasto/SC_2) = 10\%$ $P(guasto/SC_3) = 5\% = 0{,}05$

3 scatole indipendenti ma divise

$P(SC_1) = P(SC_2) = P(SC_3) = 1/3$

$$P(guasto) = \sum_{i=1}^{3} P(g/SC_i) \cdot P(SC_i) = \frac{1}{3}(0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}05)$$

$$= \frac{1}{3}\, 0{,}23 = 0{,}07\bar{6} \cong 7{,}67\%$$

2500

$P(g) = 0{,}4 \cdot 0{,}08 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}072 = 7{,}2\%$

$P(SC_1) = \frac{1000}{2500} \Downarrow 0{,}4$ $P(SC_2) = \frac{500}{2500} \Downarrow 0{,}2$ $P(SC_3) = \frac{1000}{2500} \Downarrow 0{,}4$

$$P(SC_i/g) = \frac{P(g/SC_i) \cdot P(SC_i)}{P(g)}$$ (usando T. Bayes) M.A.P

$$\frac{P(g/SC_1) \cdot \cancel{P(SC_1)}}{\cancel{P(g)}} \underset{SC_2}{\overset{SC_1}{\gtrless}} \frac{P(g|SC_2) \cdot \cancel{P(SC_2)}}{\cancel{P(g)}} \rightarrow \text{perché } P(SC_1) = P(SC_2)$$

$0{,}08 \gtrless 0{,}1 \Rightarrow$ decido SC_2 | da questa proverrà l'elemento guasto

Se ho 3 eventi equiprobabili mi basta confrontarne la probabilità di verosimiglianza

28/02/18

VARIABILI ALEATORIE

VALORI ASSUMIBILI DALLA VAR. ALEATORIA

Lo spazio degli elementi contiene tutti gli elementi elementari di cui troviamo le relative probabilità

Ogni risultato dell'esperimento viene collegato ad un valore reale, la VAR. ALEATORIA è questo collegamento.

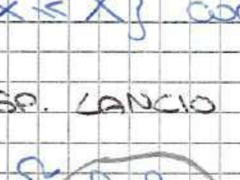
$P\{X \leq X_0\}$ ← evento (quando la var. aleatoria assume un valore minore uguale ad uno dato)

X: VAR. ALEATORIA

$\forall$ valore di X_0

$\{x \leq X\}$ con X reale

ESP. LANCIO DI 1 DADO



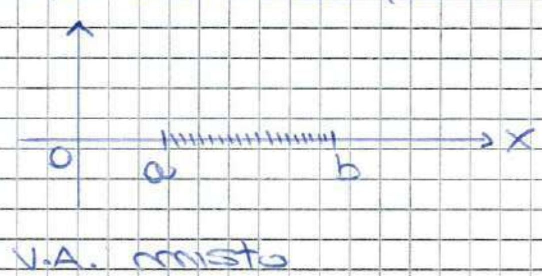
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1	2	3	4	5	6

LA V.A. è discreta e può assumere solo dei valori positivi

TIPI DI VAR. ALEATORIE

X V.A. discreta

X V.A. continua (se hanno un numero infinito di valori)



X V.A. mista

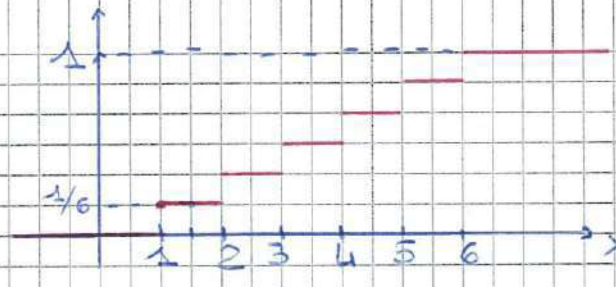
Il valore della V.A. dipende dal tipo di esperimento che scelgo.

es. con i dadi

X_0 reale $= 2{,}7$

$$P\{X \leq X_0\} = P\{X \leq 2{,}7\} = P\{(X=1) \text{ OR } (X=2)\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

PERCHÉ SONO MUTUALMENTE ESCLUSIVI



$P\{X \le 99\} = P\{\Omega\} = 1$

$P\{X \le -10\} = P\{\emptyset\} = 0$

$P(x \le X) \quad X = 1{,}5$

$P(X \le 0{,}999) = 0$

$P(X \le 1{,}0001) = 1/6$

$P(x \le X) = F_x(X)$ funzione sull'asse dei Reali che si riferisce alla var. aleatoria X

Funzione di distribuzione
(di probabilità)
della variabile aleatoria X o FUNZIONE CUMULATIVA C.D.F.

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} F_x(x) = +1\end{array}}$$

* PROPRIETÀ SEMPRE VALIDE

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

* $0 \le F_x(X) \le 1$

* Se ci sono discontinuità: $F_x(X) = F_x(X^+)$ ASSUME IL VALORE DEL LIMITE DA DESTRA

* $X_2 > X_1 \quad F_x(X_2) \ge F_x(X_1)$ → MONOTONA NON DECRESCENTE (PUÒ AL PIÙ MANTENERSI COSTANTE)

$\{X \le X_2\} \supseteq \{X \le X_1\}$ il primo contiene il secondo

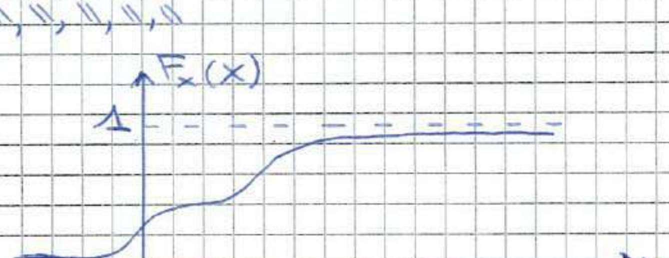
* $P\{X_1 < X \le X_2\} = F_x(X_2) - F_x(X_1)$ Prob che la V.A. cada in un certo intervallo

La variab. aleat. assume 6 valori diversi ognuno con una probabilità.

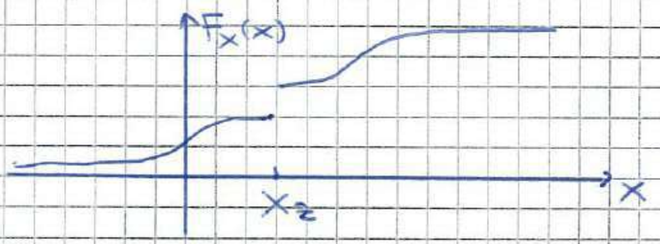
$X_i \quad 1,2,3,4,5,6$

$P(X_i) \quad \frac{1}{6}$, ", ", ", ", "

X V.A. CONTINUA

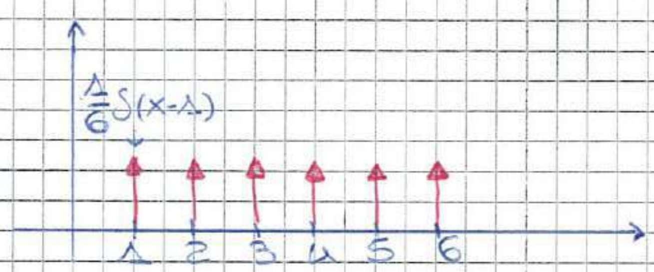


X V.A. MISTA



$$\boxed{f_x(x) \triangleq \frac{dF_x(x)}{dx}}$$

funzione di DENSITÀ DI PROBABILITÀ (ddp o pdf)



Sono tutti impulsi della stessa area

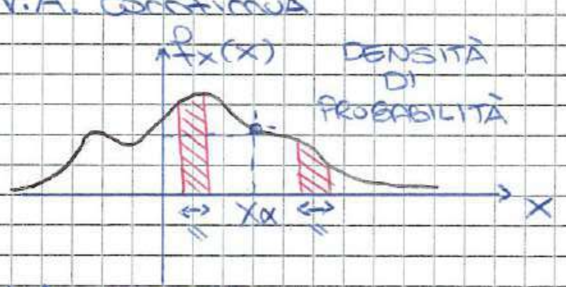
* $f_x(x) \geq 0$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\eta)\, d\eta = 1$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\eta)\, d\eta$$

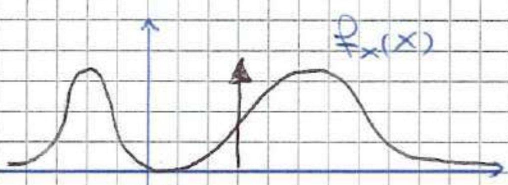
$$P\{x_1 < X < x_2\} = F_x(x_2) - F_x(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(\eta)\, d\eta$$

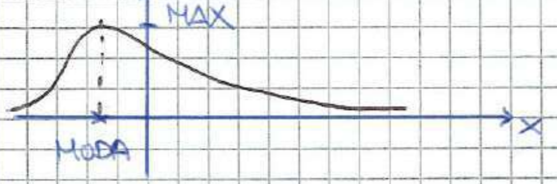
V.A. continua



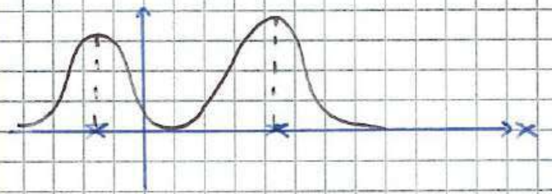
La probabilità di cadere in uno dei due intervalli ha valori differenti

V.A. mista





UNIMODALE



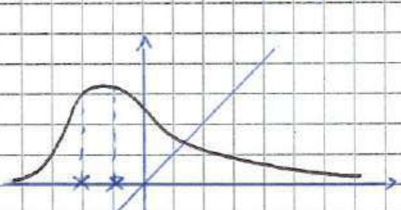
BIMODALE

VALORE MEDIO = valore atteso

$\mu = \overline{X} \triangleq E\{X\}$ dove E è l'operatore di MEDIA STATISTICA (EXPECTATION)

$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f_X(X)\, dX$ → BARICENTRO della mia funzione

$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) \cdot f_X(X)\, dX$ Operatore applicabile se conosco la densità di probabilità e so fare l'integrale



BARICENTRO fine con impulsi

$$\mu = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f_X(X)\, dX = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} X \cdot \frac{1}{6}\delta(X-1)\, dX + \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} X \cdot \frac{1}{6}\delta(X-2)\, dX \ldots$$

$$= \frac{1}{6}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \delta(X-1)\, dX = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{6}\int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} 2 \cdot \delta(X-2)\, dX = \frac{2}{6}$$

$$\mu = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$\mu = \overline{X} = \sum_{i=1}^{6} X_i \cdot P(X_i) = 3{,}5$$

MOMENTI di una V.A.

$m_m \hat{=} E\{X^m\}$ MOMENTO ASSOLUTO DI ORDINE m

$m_2 = E\{X^2\}$ v.q.m

$$m_2 = E\{X^2\} = \sum_{i=1}^{6} X_i^2 \cdot P(X_i) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

I momenti centrali di una V.A. utilizzano μ ed è la media dello scostamento tra il valore di V.A e la media alla potenza:

$$\mu_m = E\{(X-\mu)^m\}$$

EXPECTATION → operatore lineare

$E\{ax+by\}$ a,b costanti
x,y 2 V.A.

$E\{ax+by\} = aE\{x\} + bE\{y\}$

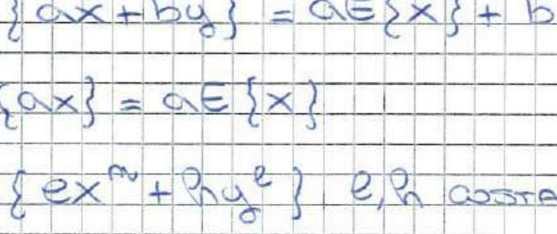
$E\{ax\} = aE\{x\}$

$E\{ex^m + hy^e\}$ e,h costanti $= eE\{X^m\} + hE\{y^e\}$

$m=1$ $E\{X-\mu\} = E\{x\} - \mu = \mu - \mu = 0$ NON HA SENSO CALCOLARLO, È SEMPRE NULLO

$m=2$
$$E\{(X-\mu)^2\} = E\{X^2 - 2\mu X + \mu^2\} = E\{X^2\} - 2\mu E\{X\} + \mu^2$$
$$= E\{X^2\} - 2\mu^2 + \mu^2 = E\{X^2\} - \mu^2 \Rightarrow$$ MOMENTO CENTRALE DI ORDINE 2 DI X

$= \sigma_x^2$ VARIANZA dice se la V.A è molto dispersa sull'asse delle X



$$\boxed{\sigma_x^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2}$$

media al quadrato meno il quadrato della media

6/03/18

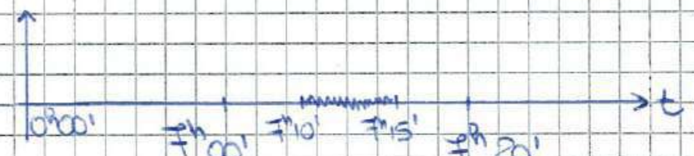
- esperimento arrivo del treno

$P\{\text{TRENO ARRIVA } [T_1, T_2]\} = 1 \qquad T = T_2 - T_1$

$$P(\text{TRENO ARRIVI } [t_1, t_2]) = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

CASI FAVOREVOLI

CASI POSSIBILI



$P = \frac{5\,min}{20\,min} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

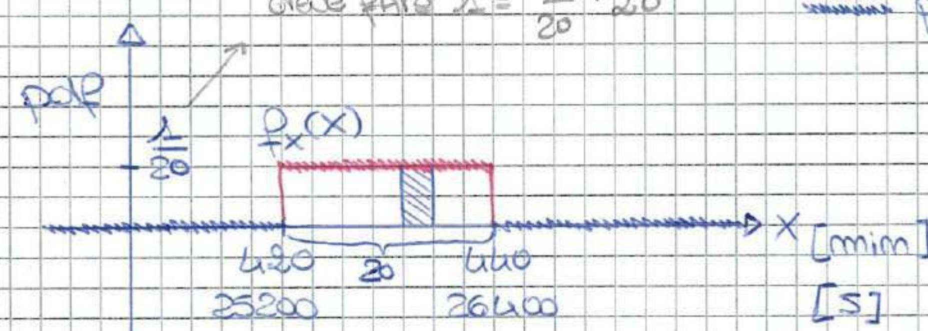
V.A. X = istante di arrivo

DENSITÀ DI PROBABILITÀ

funzione

deve fare $1 = \frac{1}{20} \cdot 20$

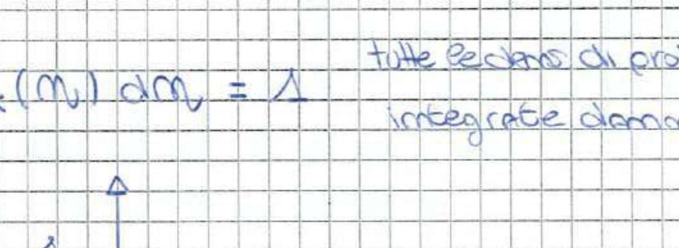
pdf = 0



$420 \leq X < 440$ [min]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(n)\, dn = 1$$

tutte le densità di probabilità integrate danno l'evento certo



X V.A. uniformemente distribuita o uniforme nell'intervallo 25200 ÷ 26400.

$P\{25200 \leq X \leq 26400\} = 1$