



Funzione di montante (leggi di capitalizzazione)

- $\phi(0, t_1, t_2) = 0 \quad 0 \leq t_1 \leq t_2$ Se il capitale investito è zero sarà zero anche il capitale
- $\phi(C, t_1, t_2) = C \quad \forall C > 0, \forall t_1 > 0$ Se il capitale è investito da t_1 a t_2 si avrà il capitale
- $\phi(C, t_1, t_2) < (C, t_1, t_2)$ da seconda tensione è maggiore della prima
- $\phi(C_1, t_1, t_2) < (C_2, t_1, t_2)$ Il secondo capitale è maggiore del primo

PROPRIETÀ LEGGI FINANZIARIE

1) UNIFORMITÀ NEL TEMPO

Il capitale investito da t_1 a t_2 , a parità di capitale, dovrà lo stesso montante del capitale investito da $t_1 + \alpha$ a $t_2 + \alpha$

$$\phi(C, t_1, t_2) = \phi(C, t_1 + \alpha, t_2 + \alpha)$$

2) ADDITIVITÀ RISPETTO AL CAPITALE

Il montante della somma di due capitali C_1, C_2 è uguale alla somma dei due montanti dei singoli capitali

$$\phi(C_1, t_1, t_2) + \phi(C_2, t_1, t_2) =$$

$$\phi(C_1 + C_2, t_1, t_2)$$

3) SCOMPONIBILITÀ

Quando il montante di C impiegato da t_1 a t_2 è uguale a impiegarlo da t_1 a z e da z a t_2 .

$$\phi(C, t_1, t_2) = \phi(C, t_1, z) + (z, t_2) = [\phi(t_1, z), z, t_2]$$

4) SCINDIBILITÀ:

Quando è additiva e scomponibile

$$f(t_1, t_2) = f(t_1, z) f(z, t_2)$$

Funzione di sconto (leggi di attualizzazione)

- $V(0, t_1, t_2) = 0 \quad 0 \leq t_1 \leq t_2$ Il valore attuale di 0 sarà 0
- $V(C, t_1, t_2) = C \quad \forall C > 0, \forall t_1 > 0$ Il valore attuale di C sarà C
- $V(C, t_1, t_2) > (C, t_1, t_2)$
- $V(C_1, t_1, t_2) < (C_2, t_1, t_2)$

PROPRIETÀ LEGGI DI SCONTO

1) UNIFORMITÀ NEL TEMPO

$$V(C, t_1, t_2) = V(C, t) t = t_2 - t_1$$

2) ADDITIVITÀ RISPETTO AL CAPITALE

$$V(C_1, t_1, t_2) = V(C_1, t_1, t_2) + V(C_2, t_1, t_2)$$

3) SCOMPONIBILITÀ

$$V(C, t_1, t_2) = (V(V, z, t_2), t_1, z)$$

4) SCINDIBILITÀ:

Quando è additiva e scomponibile

$$g(t_1, t_2) = g(z, t_2) g(t_1, z)$$

Esercizi matematica finanziaria

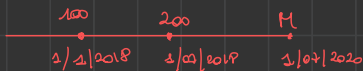
PARTE 1: LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE, REGIME DI SCONTO, REGIME DI CAPITALIZZAZIONE (ESERCIZI DI RIEPILOGO)

① 2 capitali di 100 e 200 sono disponibili, rispettivamente, dall'1/1/2018 e 1/7/2018. Si chiede di determinare:

A) montante di ciascun capitale all'1/7/2020 in regime di interesse semplice con $i = 0.02$

B) montante di ciascun capitale all'1/7/2020 in regime di capie continua ad intensità annua $i = 0.01$

A)



$$M_1 = C(1 + i \times t) = 100(1 + 0.02 \times 2.5) = 105$$

$$M_2 = C(1 + i \times t) = 200(1 + 0.02 \times 2) = 208$$

B)

$$M_1 = C e^{\int_0^t \delta ds} = C e^{\delta \Big|_0^t} = C e^{\delta t} = 100 e^{0.01 \times 2.5} = 102,531$$

$$M_2 = C e^{\int_0^t \delta ds} = C e^{\delta \Big|_0^t} = C e^{\delta t} = 200 e^{0.01 \times 2} = 204,040$$

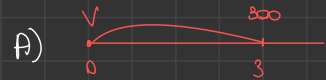


intensità annua interesse (δ) \neq tasso annuo istantaneo ($p(s)$)

2) Un debito di 3000 € viene estinto anticipatamente di 3 anni. Calcolare importo liquidato:

A) In regime di sconto semplice $d = 0,05$ (tasso annuo di sconto)

B) In regime di sconto composto $i = 0,05$ (tasso interesse)



$$V = C(1 - dt) = C(1 - i \times t) = 3000(1 - 0,05 \times 3) = 2550$$

B) $i = d \Rightarrow d = i \cdot v$
 $v = (1 + i)^{-1}$ } convertire tasso annuo interesse in tasso di sconto

$$i = d \Rightarrow d = 0,05 \cdot (1 + 0,05)^{-1} = 0,047619047$$

$$V = C(1 - d)^n = 3000(1 - 0,047619047)^3 = 2591,51$$

3) Il debito di 4000€ dovrebbe essere estinto il 15/4/2024. Calcolare in regime di sconto commerciale e composto l'importo che viene invece estinto oggi 1/01/2020 con $d = 0,02$



$$t = 4 + \frac{3}{12} + \frac{14}{30} = 4,71667$$

- regime sconto commerciale: $V = C(1 - d \times t) = 4000(1 - 0,02 \times 4,7166) = 3622,6672$
- regime sconto composto: $V = C(1 - d)^n = 4000(1 - 0,02)^{4,7166} = 3636,439$

4) Calcolare il tempo necessario affinché in regime di sconto commerciale il valore attuale di un capitale di 12000€ valutato $d = 0,05$ sia pari a 10000€

$$\begin{aligned}
 V &= C(1 - d \times t) = \\
 10'000 &= 12000(1 - 0,05 \times t) \\
 10'000 &= 12000(1 - 0,05t) \\
 12000(1 - 0,05t) &= \frac{5}{6} \\
 1 - 0,05t &= \frac{5}{6} \\
 -0,05t &= \frac{5}{6} - 1 \\
 0,05t &= \frac{1}{6} \\
 t &= 3,3333 \approx 3 \text{ a } 3 \text{ m } 20 \text{ g}
 \end{aligned}$$

5) Un operatore finanziario deve riscuotere tre crediti a scadenze diversificate:

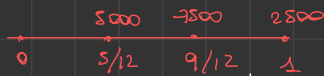
- capitale di 5000 tra 3 mesi
- capitale di 7500 tra 9 mesi
- capitale di 2500 tra 1 anno

In accordo con il debitore l'operatore si fa liquidare un importo unico oggi, applicando il regime di sconto composto al $i = 0,02$. Con l'importo riscosso estingue un debito contratto 8 mesi prima in regime di int. semplice al $i = 0,03$.

Calcolare:

A) importo riscosso in data odierna

B) importo capitale ottenuto in prestito 8 mesi prima



$$A) V = C(1-d)^t = 5000(1-0,02)^{5/12} + 7500(1-0,02)^{9/12} + 2500(1-0,02)^1$$
$$= 4958,089 + 7387,21 + 2500 = 14795,3$$

$$B) C = \frac{M}{1+it} = \frac{14795,3}{1+0,03\left(\frac{8}{12}\right)} = 14505,2$$

⑥ Un operatore finanziario investe oggi due importi A e B in modo tale che la loro somma sia pari a 15000 € sapendo che A è il triplo di B. Il capitale è investito in regime di int. rse composto per 1a e 9m $i=0.025$, mentre il capitale B viene in regime di int. rse semplice per 3a $i=0.0325$. Cinto alla scadenza del primo investimento l'operatore richiede l'estinzione anticipata del secondo investimento, concessa in regime di sconto commerciale al $i=0.03$. Determinazione:

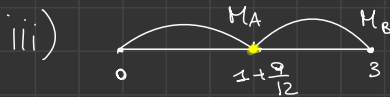
- i) l'importo di A e B
- ii) il montante del primo investimento e il montante che l'operatore avrebbe dovuto riscuotere dal secondo investimento
- iii) Il valore complessivo riscosso dopo 1a e 9m e il prezzo del disinvestimento del secondo investimento
- iv) Il valore del disinvestimento valutato in regime di sconto composto

$$i) \begin{cases} A+B=15000 \\ A=3B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4B=15000 \\ A=3B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3B+B=15000 \\ A=3B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3750 \\ A=3 \cdot 3750=11250 \end{cases}$$

$$ii) M_A = C(1+i)^t = 11250 \left(1 + 0.025\right)^{1 + \frac{9}{12}} = 11746,79$$

$$M_B = C(1+ixt) = 3750 \left(1 + 0,0325 \times 3\right) = 4115,62$$



$$M_A = 11746,79$$

$$V_B = \frac{M_B}{1+i \times t} = \frac{4115,62}{1 + 0,0325 \times \left(3 - 1 - \frac{9}{12}\right)} = 3466,86$$

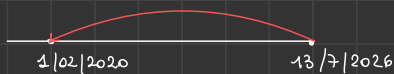
$$\text{Val. riscosso} = M_A + V_B = 15713,65$$

$$iv) V_2 = 3966,33 \rightarrow i = d \rightarrow d = i \times V = \frac{0,03}{1,03} = 0,029$$

In regime di sconto composto aureo:

$$V_2 = M_2 (1 - i \times t) = 4115,62 (1 - 0,029 \times 1,25) = 3966,33$$

8) Un debito di 12500 erigibile in data 13/7/2026 viene estinto oggi 1/02/2020. Determinare l'ammontare dell'importo estinto in regime di sconto razionale $i = 0,05$



$$t = 6 \text{ a } 5 \text{ m } 12 \text{ g}$$

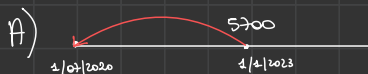
$$t = 6 + \frac{5}{12} + \frac{12}{30} = 6,81$$

$$V = \frac{C}{1 + i \times t} = \frac{12 \cdot 500}{1 + 0,05 \times 6,81} = 9322,561$$

7) Calcolare oggi 1/07/2020 in regime di sconto razionale il valore attuale di un capitale di 5700€ erigibile in data 1/1/2023 nelle seguenti ip:

A) è dato $d = 0,06$

B) $i = 0,06$ regime int. semplice



$$A) V = C - \frac{C d t}{1 - d + d t} = 5700 - \frac{5700 \times 0,06 \times 2,5}{1 - 0,06 + (0,06 \times 2,5)} = 4915,596$$

$$B) V = \frac{C}{1 + i \times t} = \frac{5700}{1 + 0,06 \times 2,5} = 4956,522$$

Il regime di interesse semplice è la legge coniugata al regime di sconto razionale

9) Determinare il tempo di anticipazione al $i = 0.05$ nel regime di sconto razionale in cui il debito di 6540 si estingue pagando 5025.

$$V = \frac{C}{1 + i \times t} =$$

$$5025 = \frac{6540}{1 + 0.05 \times t}$$

$$\frac{5025}{6540} = \frac{1}{1 + 0.05 \times t}$$

$$0,768348 = \frac{1}{1 + 0,05t}$$

$$1 + 0,05t = \frac{1}{0,768348}$$

$$0,05t = \frac{1}{0,768348} - 1$$

$$\frac{0,05t}{0,05} = \frac{0,3014935}{0,05} =$$

$$t = 6,029871881 \approx 6 \text{a } 0 \text{m } 14 \text{s}$$

ESERCIZI SLIDE

1) Determinare il montante prodotto dal capitale $C = 100 \text{€}$ investito l'1/1/2020 fino all'1/6/2021 con $i = 0.02$ in regime di int. semplice



$$M = C(1 + i \times t) = 100 \left[1 + 0.02 \times \left(1 + \frac{5}{12} \right) \right] = 102,833$$

2) Un capitale di 100'000 € è impiegato dall'1/2/2020 al 15/09/2020 in regime di int. semplice sapendo che il montante è 106'750 determinare il tasso i .

$$M = C(1 + i \times t) =$$

$$106'750 = 100'000 \left[1 + i \times \left(\frac{7}{12} + \frac{14}{30} \right) \right] =$$

$$106'750 = 100'000 [1 + i \times (0,2722)] =$$

$$\frac{106'750}{100'000} = \frac{100'000}{100'000} (1 + 0,2722i)$$

$$(1 + 0,2722i) = 1,0675$$

$$0,2722i = 1,0675 - 1$$

$$\frac{0,2722i}{0,2722} = \frac{0,0675}{0,2722} = 0,247$$

$$i = \frac{1}{t} \left(\frac{M}{C} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{0,2722} \left(\frac{106'750}{100'000} - 1 \right) =$$

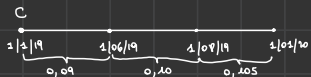
$$= 3,67376 \times 0,0675 = 0,247$$

③ Un capitale di 450€ è impiegato dall'01/01/2019 all'1/01/2020 in regime di int. semplice con:

$i = 0.09$ dall'01/01/2019 fino al 01/06/2019;

$i = 0.10$ dall'1/06/2019 all'1/08/2019;

$i = 0.105$ dall'1/08/2019 all'1/01/2020



$$M = C(1 + i \times t) = 450 \left[1 + 0.09 \times \left(\frac{5}{12}\right) + 0.10 \times \left(\frac{2}{12}\right) + 0.105 \times \left(\frac{5}{12}\right) \right] = 499,625$$

④ Un capitale di 5000€ è impiegato in regime di cap. composta dall'1/1/14 all'1/05/2020 con $i = 0.12$. Si chiede di determinare il montante

$$M = C(1 + i)^t = 5000(1 + 0.12)^{6 + \frac{4}{12}} = 10249,06$$

⑤ Un capitale di 1000 è impiegato in regime di cap. composta semestrale dall'1/02/18 all'1/08/21 $i_{2} = 0.05$. Determinare il montante.

$$M = C(1 + i)^t = 1000(1 + 0.05)^7 = 1407,10$$

⑥ Determinare il montante prodotto da 100€ impiegati in regime di cap. composta mensile per un anno, sapendo che:

$i_{1/12} = 0.02$ 1/1/19 - 1/3/19

$i_{2/12} = 0.04$ 1/3/19 - 1/09/19

$i_{1/12} = 0.012$ 1/09/19 - 1/1/20



$$M = C(1 + i)^t = 100 \left(1 + 0.02\right)^2 \times \left(1 + 0.04\right) + \left(1 + 0.012\right)^4 = 119,25$$