POLINOMIO DI TAYLOR (O DI MCLAUREN, se $x_0 = 0$) APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI.

IDEA: APPROSSIMARE UNA f IN UN INTORNO DI UN x_0 CON UN POLINOMIO.

$$f: T \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x_0 \in T$$

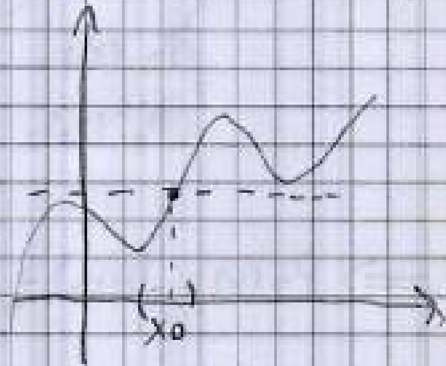
GENERICO POLINOMIO CENTRATO IN x_0

$$P_m(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_m(x-x_0)^m$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$: COEFFICIENTI REALI

$c_0, c_1, c_2, \ldots c_m = ?$ PROBLEMA

① $\boxed{m=0}$ (APPROSSIMO CON UNA FUNZIONE COSTANTE)



$$P_0(x) = c_0 \longrightarrow c_0?$$

$$\boxed{P_0(x_0) = f(x_0)} \implies c_0 = f(x_0)$$

② $\boxed{m=1}$ (APPROSSIMO CON UNA RETTA)

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x-x_0) \qquad c_0? \; c_1?$$

CONDIZIONI $\begin{cases} ① \; P_1(x_0) = f(x_0) \\ ② \; P_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} ① \; P_1(x_0) = c_0 + c_1\underbrace{(x_0-x_0)}_{=0} = c_0 = f(x_0) \\ ② \; P_1'(x_0) = 0 + c_1 = f'(x_0) \end{cases}$$

$\implies$ LA RETTA APPROSSIMANTE È

$$P_1(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}_{\text{DIFFERENZIALE.}}$$

③ $\boxed{n=2}$ (APPROSSIMAZIONE CON POLINOMIO DI 2° GRADO)

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2$$

$$c_0,\ c_1,\ c_2\ ?$$

<u>CONDIZIONI</u>

$$\begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2'(x_0) = f'(x_0) \\ P_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = c_0 = f(x_0) \\ P_2'(x_0) = 0 + c_1 + 2c_2\underbrace{(x_0-x_0)}_{\to 0} = c_1 = f'(x_0) \\ P_2''(x_0) = 0 + 2c_2 = f''(x_0) \Longrightarrow c_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

POLINOMIO APPROSSIMANTE DI GRADO 2

⋮

SI PUÒ FARE LO STESSO PROCEDIMENTO FINO ALL'ORDINE n

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n'(x_0) = f'(x_0) \\ P_n''(x_0) = f''(x_0) \\ \vdots \\ P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \dots + n c_n (x-x_0)^{n-1} = c_1$$

UNICI TERMINI $\neq 0$ $(x=x_0)$

$$P_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2\, c_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} = 2!\,c_2$$

$$P_n'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3 + \dots + n(n-1)(n-2)c_n(x-x_0)^{n-3} = 6c_3 = 3!\,c_3$$

INFINE SI OTTIENE

$$\begin{cases} c_0 = f(x_0) \\ c_1 = f'(x_0) \\ c_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2} \\ c_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{6} \\ \vdots \\ c_m = \dfrac{1}{m!} \cdot f^{(m)}(x_0) \end{cases}$$

USANDO LA SEGUENTE CONVENZIONE: $0! = 1$

$$\Longrightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, m$$

POSSO RISCRIVERE IL POLINOMIO APPROSSIMANTE

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) \cdot (x - x_0)^m$$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

CON LA CONVENZIONE $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$

NOTA BENE: SI PUÒ RISCRIVERE IL POLINOMIO APPROSSIMANTE $P_m(x)$, NON IN FUNZIONE DI x MA IN FUNZIONE DI $h = x - x_0$ (INCREMENTO)

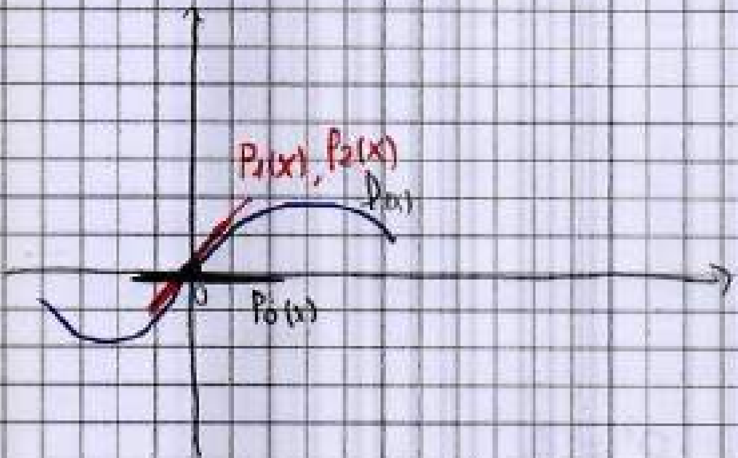
$\rightarrow x = x_0 + h$

$$P_m(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot h^k$$

ESEMPIO $f(x) = \text{sen}\, x$ in $x_0 = 0$

$n=0$

$f(0) = \text{sen}\, 0 = 0$ $\qquad P_0(x) = 0$



$n=1$ $\qquad P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$

$c_0 = 0$

$c_1 = f'(x_0) = \cos 0 = 1$

$P_1(x) = x$

$n=2$ $\qquad c_2?$

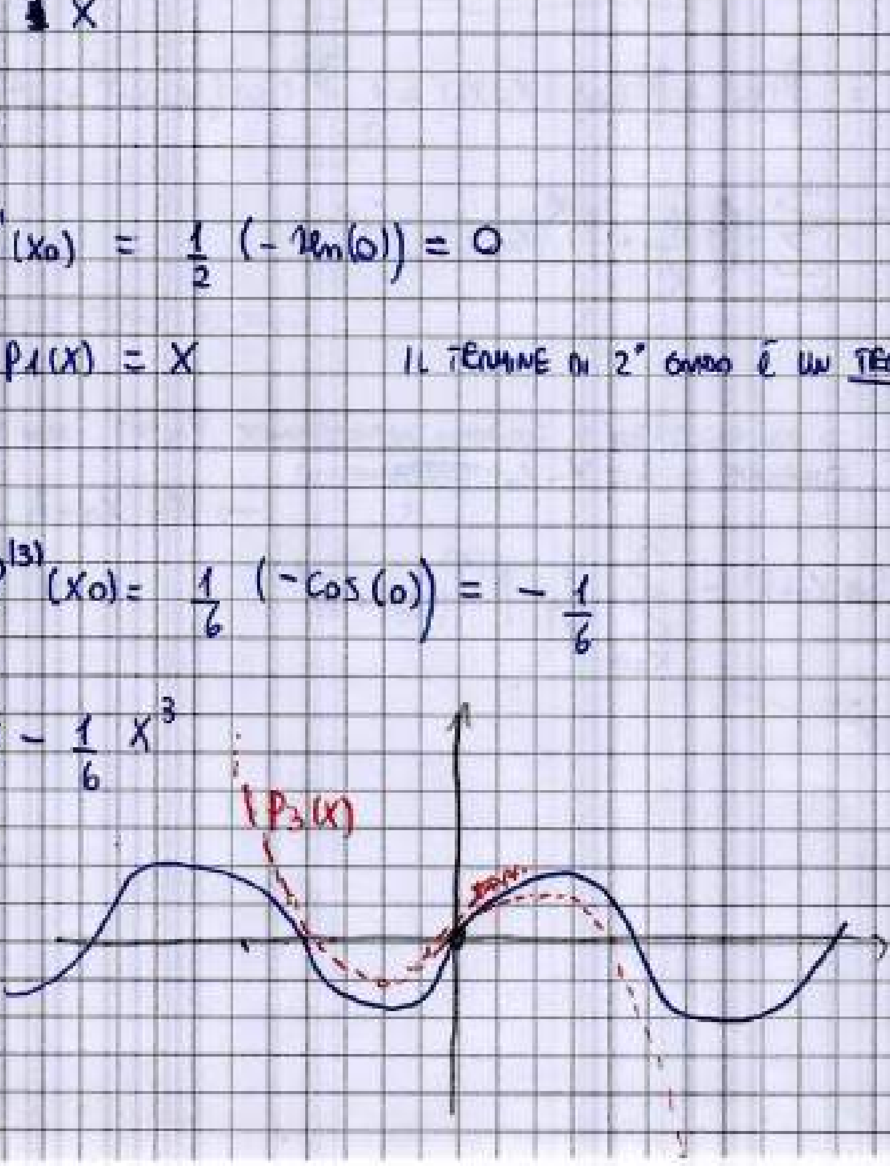
$c_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) = \frac{1}{2}(-\text{sen}(0)) = 0$

$P_2(x) = P_1(x) = x$ $\qquad$ IL TERMINE DI 2° GRADO È UN TERMINE NULLO.

$n=3$ $\qquad c_3 = ?$

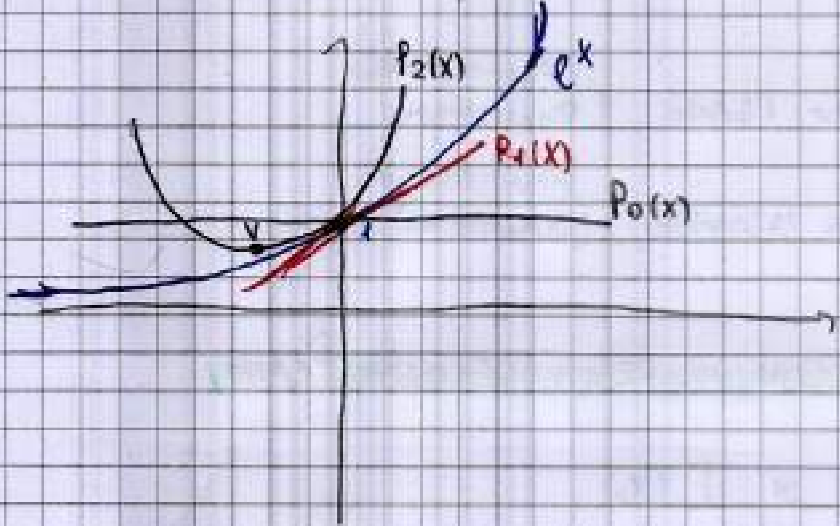
$c_3 = \frac{1}{6} f^{(3)}(x_0) = \frac{1}{6}(-\cos(0)) = -\frac{1}{6}$

$P_3(x) = x - \frac{1}{6} x^3$



ESEMPIO $f(x) = e^x$

$x_0 = 0$



$m=0 \quad C_0 = f(x_0) = e^0 = 1 \quad P_0(x) = 1$

$m=1 \quad C_1 = f'(x_0) = e^0 = 1 \quad P_1(x) = 1 + x$

$m=2 \quad C_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) = \frac{1}{2} \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$

ERRORE DI APPROSSIMAZIONE O RESTO

$f(x) \simeq P_m(x)$

$x = x_0 + h \qquad (h = x - x_0)$

DEFINIZIONE: IL RESTO $R_m(h) = f(x) - P_m(x)$

$$R_m(h) = f(x_0+h) - P_m(x_0+h) =$$
$$= f(x_0+h) - \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + \ldots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) \cdot h^m \right)$$

DEFINIZIONE: SIA f DEFINITA IN $I(x_0)$, SIA $(x_0+h) \in I(x_0)$, ED ESISTANO IN x_0 $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(m)}(x_0)$, ALLORA SI DICE FORMULA DI TAYLOR, ARRESTATA ALL'ORDINE m PER f RELATIVA AL PUNTO INIZIALE x_0 E ALL'INCREMENTO h, L'UGUAGLIANZA:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \cdot h^m + R_m(h)$$

DOVE $R_m(h)$ SI CHIAMA: RESTO DELLA FORMULA DI TAYLOR.

OSSERVAZIONE R DIPENDE DA (n, f, x_0, h)

CARATTERIZZAZIONE DI R

2 FORME DI $R_n(h)$
- 1) SECONDO PEANO (CARATTERIZZAZIONE QUALITATIVA)
- 2) SECONDO LAGRANGE (CARATTERIZZAZIONE QUANTITATIVA)

TEOREMA: FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO SECONDO PEANO.

- SIA $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA IN $I(x_0)$
- SIA f DERIVABILE n VOLTE IN x_0.
- SIA $x_0 + h \in I(x_0)$
- SIA $P_n(x_0+h)$ IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n PER LA FUNZIONE f, CENTRATO IN x_0.

$$\Longrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!} + \varepsilon_n(h)$$

È IL RESTO SECONDO PEANO.

CON $\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_n(h)}{h^n} = 0$ $\quad$ $\varepsilon_n(h)$ È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE AD h^n PER $h \to 0$

L'ERRORE DI APPROSSIMAZIONE CHE COMMETTIAMO TENDE A 0, QUINDI L'APPROSSIMAZIONE È OTTIMA.
L'ERRORE TENDE A 0 QUANDO $h \to 0$, CIOÈ QUANDO CI AVVICINIAMO AL PUNTO x_0;
L'ERRORE TENDE A 0 PIÙ VELOCEMENTE DI h^n

PIÙ n È GRANDE, PIÙ h^n VA VELOCEMENTE A 0; PIÙ n È GRANDE = + TERMINI USO NEL POLINOMIO
QUINDI + TERMINI USO NEL POLINOMIO DI TAYLOR, PIÙ MIGLIORA L'APPROSSIMAZIONE

(SI USANO I SIMBOLI DI LANDAU

$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_n(h)}{h^n} = 0 \quad \to \quad \varepsilon_n(h)$ È $o(h^n)$) o PICCOLO DI h^n

L'ERRORE SECONDO PEANO È UN $o(h^n)$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon_n(h)}{h^n} = 0$$

RISCRIVO L'ERRORE IN MODO ESPLICITO:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0) - \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x_0) - \dots - \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)}{h^n} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

POSSO USARE L'HOSPITAL.

ATTENZIONE: DOBBIAMO DERIVARE LE FUNZIONI COINVOLTE RISPETTO AD h $\left(\lim_{h\to 0}\right)$

h È LA VARIABILE DI DERIVAZIONE.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - 0 - f'(x_0) - \frac{2h}{2 \cdot 1} \cdot f''(x_0) - \dots - \frac{n \cdot h^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} \cdot f^{(n)}(x_0)}{n \cdot h^{n-1}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

APPLICO DI NUOVO L'HOSPITAL

$$\lim_{h \to 0} \frac{f''(x_0+h) - 0 - f''(x_0) - \dots - \frac{(n-1) \cdot h^{n-2}}{(n-1) \cdot (n-2)!} \cdot f^{(n)}(x_0)}{n \cdot (n-1) \cdot h^{n-2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

AL DENOMINATORE, AD OGNI PASSAGGIO, SI OTTIENE UNA POTENZA DI h PIÙ BASSA; SE APPLICHIAMO L'HOSPITAL IL NUMERO NECESSARIO DI VOLTE, ARRIVEREMO A UN PUNTO IN CUI, AL DENOMINATORE, LA POTENZA DI h SARÀ SPARITA, RIMARRÀ UN NUMERO, E QUINDI NON AVREMO PIÙ LO 0 AL DENOMINATORE, AVREMO RISOLTO LA FORMA INDETERMINATA.

⋮

APPLICO L'HOSPITAL $n-1$ VOLTE:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0) - h \cdot f^{(n)}(x_0)}{n!\, h} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

RISCRIVIAMO $= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\, h} - \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot f^{(n)}(x_0)}{n!\, h} =$

NON DIPENDE DA h

$$= \frac{1}{n!}\left(\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}}_{\to f^{(n)}(x_0)} - f^{(n)}(x_0)\right) =$$

$f^{(n)}(x_0)$, LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE PER $f^{(n)}(x_0)$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0$$

APPLICAZIONE DEL RISULTATO AL CALCOLO DEI LIMITI.

Es) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

RISOLVERE APPLICANDO TAYLOR, CON RESTO NELLA FORMA DI PEANO.
X È GIÀ UN POLINOMIO.
SEN X NO, DOBBIAMO APPROSSIMARLO.

APPROSSIMO SEN X CON UN POLINOMIO DI GRADO 0 → FUNZIONE COSTANTE, NON CI ANDIAMO; CON POLINOMIO DI ORDINE 1
IN $x_0 = 0$

$\text{sen}\, x \simeq x$ NELL'INTORNO $I(x_0)$

$$\text{sen}\, x = x + o(x) \quad x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$ CE LO DICE PEANO

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 + \overbrace{\frac{o(x)}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}} = 1$$

CHI MI DICE A CHE ORDINE DI APPROSSIMAZIONE FERMARMI? NESSUNO.

APPROSS. SEN X CON $n = 3$

$$\text{sen}\, x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x} = \frac{\cancel{x}\left(1 - \overbrace{\frac{1}{6}x^2}^{\to 0} + \overbrace{\frac{o(x^3)}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}} = 1$$

Es) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \to x_0 = 0$$

USIAMO TAYLOR
APPROSSIMIAMO $\ln(x+1)$ IN $I(0)$ → • CI SERVE $f'(\ln(x+1)) = \frac{1}{x+1}$, CALCOLATA IN $x_0 = 0$
OTTENIAMO 1.
• CI SERVE IL VALORE DELLA f IN $x_0 = 0 \to 0$

$$\ln(x+1) = 0 + 1 \cdot x = x + o(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \overbrace{\frac{o(x)}{x}}^{\to 0}\right)}{x} = 1$$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x \cdot \ln(1+x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ $\qquad x_0 = 0$

• $e^x = 1 + (1 \cdot x) + \frac{1}{2} \cdot (x)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

• $\ln(1+x) = x + o(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} - \cancel{1}}{x \cdot (x + o(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{2}$$