DEFINIZIONE DI INSIEME: collezione di oggetti che hanno in comune una o più proprietà.
DEFINIZIONE DI SOTTOINSIEME: dati A e B, si dice che B è sottoinsieme di A se ogni elemento di B è anche elemento di A. B può essere sotto insieme proprio di A ($B \subset A$) o improprio di A ($B \subseteq A$)
INSIEME DELLE PARTI DI A: P(A) è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A
UNIONE: $A \cup B = x \in A$ o $x \in B$ Proprietà commutativa $A \cup B = B \cup A$ $A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$
INTERSEZIONE: $A \cap B = x \in A$ e $x \in B$ Proprietà commutativa $A \cap B = B \cap A$ $A \cap A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
se $A \cap B = \emptyset$ sono disgiunti.
DIFFERENZA: $A \setminus B = x \in A$ e $x \in B$ se $A \cap B = \emptyset \rightarrow A \setminus B = A$ se $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$
COMPLEMENTAZIONE: B^c Proprietà involutiva $(B^c)^c = B$ se $B \subseteq A \rightarrow A \setminus B = B^c_A$
$\left.\begin{array}{l}(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\end{array}\right\}$ LEGGI DI DE MORGAN
DIFFERENZA SIMMETRICA: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
PRODOTTO CARTESIANO: $A \times B$ dati $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ è l'insieme delle coppie ordinate (a,b) dove $a \in A$ e $b \in B$.
$(a,b) \neq (b,a)$ $A \times B \neq B \times A$
PARTIZIONE DI UN INSIEME: gli insiemi $(A_1, A_2 \dots A_n)$ sono una partizione di A se: $A_i \subseteq A$, $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_J = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$
APPLICAZIONE: $f: A \rightarrow B$ dati $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, si dice applicazione di A su B una relazione f che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B. A è il DOMINIO (o insieme di definizione) e B è il CODOMINIO (o insieme delle immagini). $b = f(a)$ b è immagine di a tramite f, a è controimmagine di b tramite f.
PROPRIETÀ DELLE APPLICAZIONI: SURIETTIVA $\rightarrow$ se $f(A) = B$ cioè se il suo codominio esaurisce B.
INIETTIVA $\rightarrow$ se a elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B
BIETTIVE (BIUNIVOCHE) $\rightarrow$ se $f(A) = B$ è iniettiva e suriettiva, allora A e B sono equipotenti.
CARDINALITÀ DI UN INSIEME: Card (A) è il numero di elementi di A, può essere finito o infinita.
Se Card (A) = Card (B) $\rightarrow$ A e B sono equipotenti. Un insieme A è infinito se e solo se $\exists B \subset A$: Card (B) = Card (A).
1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ Card (A) $\leq$ Card (B) se $\exists$ un'applicazione iniettiva da A in B
2. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ Card (A) = Card (B) se $\exists$ un'applicazione biettiva di A in B
3. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ Card (A) < Card (B) se vale 1 e se nessuna applicazione iniettiva da A in B è anche suriettiva.
INFINITO NUMERABILE: se Card (A) = Card ($\mathbb{N}$)
INFINITO NON NUMERABILE: se Card (A) > Card ($\mathbb{N}$)
$\mathbb{N}$: naturali. Insieme discreto. Chiuso rispetto a somma e moltiplicazione.
Un insieme è chiuso rispetto a un'operazione $\ddot{\bullet}$ zampetta di gatto se $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \ddot{\bullet} a_2 \in A$
$\mathbb{Z}$: interi relativi. Chiuso rispetto a somma, differenza e moltiplicazione Insieme discreto.
$\mathbb{Q}$: numeri razionali. $\frac{n}{p} \in \mathbb{Q}$ $n, p \in \mathbb{Z}$. Chiuso rispetto a somma, differenza, moltiplicazione e divisione.
Insieme denso (non discreto).
$\mathbb{R}$: numeri reali. Ci sono gli irrazionali $\sqrt{\ }$. Insieme denso, continuo e non numerabile.
$\mathbb{C}$: numeri complessi. $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $a, b \in \mathbb{R}$. $a \rightarrow$ parte reale, $ib \rightarrow$ parte immaginaria, $b \rightarrow$ coefficiente dell'immaginario. Se $a = 0 \rightarrow z = i \cdot b$ (immaginario puro). Se $b = 0 \rightarrow z = a \in \mathbb{R}$.
TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: polinomio di grado n con coefficienti in $\mathbb{C}$ (quindi particolare in $\mathbb{R}$) ha n radici complesse purché prese con la loro molteplicità
$$\underbrace{P(x)}_{\text{polinomio generico}} = \underbrace{a_0}_{\text{coefficienti}} X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_n$$
MOLTEPLICITÀ: esiste un numero $K \leq n$ numeri complessi tali che $P(x) = b_0 (X - x_1)^{m_1} \cdot (X - x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (X - x_K)^{m_K}$ con $m_1 + m_2 + \dots + m_K = n$
INTERVALLO: dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si definisce intervallo l'insieme di tutti i numeri compresi tra a e b.
MAGGIORANTE: sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $b \in \mathbb{R}$ è detto maggiorante di A se $x \leq b$ $\forall x \in A$ (b non necessariamente deve appartenere ad A). A si dice superiormente limitato se esiste almeno un maggiorante di A. A si dice illimitato superiormente se non esistono maggioranti.
MINORANTE: sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $b \in \mathbb{R}$ è detto minorante di A se $x \geq b$ $\forall x \in A$. A si dice inferiormente limitato se esiste almeno un minorante di A. A si dice illimitato inferiormente se non esistono minoranti.
A LIMITATO: se A è limitato sia inferiormente che superiormente.
MINIMO: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in A$ è detto minimo di A se $m \leq x$ $\forall x \in A$. Il minimo appartiene all'insieme, mentre il

minorante no.

MASSIMO: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, M \in A$ è detto massimo di A se $M \geq x \quad \forall x \in A$. Il massimo appartiene all'insieme, mentre il maggiorante no.

Minimo e massimo se esistono sono unici.

ESTREMO SUPERIORE: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A superiormente limitato, E è detto estremo superiore di A $(E = sup(A))$ se E è un maggiorante di A ed è il minimo dei maggioranti di A.

ESTREMO INFERIORE: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A inferiormente limitato, e si dice estremo inferiore di A $(e = inf(A))$ se e è un minorante di A ed è il più grande minorante di A.

inf(A) e sup(A) se esistono sono unici. $inf(A) \leq sup(A)$.

DISTANZA: si definisce distanza in $\mathbb{R}^n$ ogni funzione $d: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$ cioè dista 0 solo quando i punti che considero sono coincidenti
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ simmetria → la distanza fra x e y deve essere uguale a quella fra x e y
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ → disuguaglianza triangolare

ogni funzione che verifica queste condizioni si dice distanza

DISTANZA EUCLIDEA: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea si dice Spazio Reale Euclideo a n dimensioni

INTORNO: dato $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, si dice INTORNO SFERICO del punto x° di raggio δ, l'insieme dei punti e distano da x° meno di δ, escluso al più x° (= si parla di intorno bucato) $I\delta(x^\circ) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x^\circ, x) < \delta\}$

si scrive anche $I\delta(x^\circ) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x^\circ \| < \delta\}$ $\quad \| \cdot \| \to$ NORMA

in $\mathbb{R}_1$ $I\delta(x^\circ) = (x^\circ - \delta, x^\circ) \cup (x, x^\circ + \delta)$ → estremi non compresi

in $\mathbb{R}_2$ DISCO BUCATO

in $\mathbb{R}_3$ SFERA O INTORNO SFERICO

in $\mathbb{R}_n$ IPERSFERA

PUNTO DI ACCUMULAZIONE: dati l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x^\circ \in \mathbb{R}^n$, si dice che x° è punto di accumulazione per A se ogni intorno di x° contiene almeno un punto di A (diverso da x°). Se x° non è di accumulazione per A allora si dice isolato. X° non appartiene necessariamente ad A, ma ogni intorno di x° deve contenere almeno un punto di A.

Se A è finito non può avere punti di accumulazione (tutti i punti di A sono isolati)

PUNTO INTERNO AD A: x° è interno ad A se $\exists\, I\delta(x^\circ) : I\delta(x^\circ) \subseteq A$

PUNTO ESTERNO AD A: x° è esterno ad A se $\exists\, I\delta(x^\circ) : I\delta(x^\circ) \cap A = \emptyset$

PUNTO DI FRONTIERA PER A: x° è di frontiera per A se non è interno e non è esterno (i punti di frontiera valgono anche per gli insiemi chiusi, cioè quando gli estremi sono compresi).

INSIEME APERTO: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se ogni suo punto è interno

INSIEME CHIUSO: A è chiuso se $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto

INSIEME COMPATTO: se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato, A si dice compatto. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto, A ammette massimo e minimo.

INSIEME CONVESSO: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x^1, x^2 \in A \quad \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in A \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$\lambda \to$ peso della combinazione lineare, numero qualsiasi tra 0 e 1 → combinazione lineare convessa di x^1 e x^2

Per dimostrare che un insieme non è convesso bisogna trovare una coppia di punti che unendoli formano un segmento che non sta all'interno dell'insieme

FUNZIONE COSTANTE: $f(x) = K$

INSIEME DI DEFINIZIONE T (DOMINIO):

Funzioni razionali intere $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Funzioni irrazionali $f(x) = \sqrt[n]{A(x)}$ → con n pari	$T: A(x) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$
→ con n dispari	Dominio di A(x)
Funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a A(x) \quad a > 0, a \neq 1$	$T: A(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}$
Funzioni esponenziali $f(x) = (A(x))^{B(x)}$	$T: \{x : A(x) > 0, B(x) \exists\} \cup \{x : A(x) = 0, B(x) > 0\}$
Funzioni goniometriche $y = \operatorname{sen} x, y = \cos x$	$\mathbb{R}$
$y = tg\, x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

FUNZIONE PARI: una funzione si dice PARI se $f(x)=f(-x)\ \forall x\in T$, è simmetrica rispetto all'asse y [es: $y=x^2$, $y=\cos x$]
FUNZIONE DISPARI: una funzione si dice dispari se $f(x)=-f(-x)\ \forall x\in T$, è simmetrica rispetto all'origine degli assi [es: $y=x^3$, $y=\operatorname{sen}x$]

MONOTONIE GLOBALI: funzione COSTANTE $\to f(x_1)=f(x_2)\quad \forall x_1\neq x_2,\ x_1,x\in T$
funzione CRESCENTE $\to f(x_1)<f(x_2)\quad \forall x_1<x_2\in T$
funzione NON DECRESCENTE $\to f(x_1)\leq f(x_2)\quad \forall x_1<x_2\in T$
funzione DECRESCENTE $\to f(x_1)>f(x_2)\quad \forall x_1<x_2\in T$
funzione NON CRESCENTE $\to f(x_1)\geq f(x_2)\quad \forall x_1<x_2\in T$

MONOTONIE LOCALI: locale perché si parla dell'intorno
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0$ si dice CRESCENTE nel punto x_0
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<0$ si dice DECRESCENTE nel punto x_0

MASSIMO GLOBALE FORTE: se $f(x_0)>f(x)\ \forall x\in T$
MASSIMO GLOBALE DEBOLE: se $f(x_0)\geq f(x)\ \forall x\in T$
MINIMO GLOBALE FORTE: se $f(x_0)<f(x)\ \forall x\in T$
MINIMO GLOBALE DEBOLE: se $f(x_0)\leq f(x)\ \forall x\in T$
MASSIMO LOCALE FORTE: se $\exists I(x_0): f(x_0)>f(x)\quad \forall x\in I(x_0)\cap T$
MASSIMO LOCALE DEBOLE: se $\exists I(x_0): f(x_0)\geq f(x)\quad \forall x\in I(x_0)\cap T$
MINIMO LOCALE FORTE: se $\exists I(x_0): f(x_0)<f(x)\quad \forall x\in I(x_0)\cap T$
MINIMO LOCALE DEBOLE: se $\exists I(x_0): f(x_0)\leq f(x)\quad \forall x\in I(x_0)\cap T$
Il forte implica il debole, NO viceversa. Il globale implica il locale, NO viceversa. È indifferente cercare il massimo di $f(x)$ o il minimo di $-f(x)$ perché sono la stessa cosa.

DEFINIZIONE DI LIMITE: data una $f: T\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per I si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ se $\forall I(l)\exists I^l(x_0): \forall x\in I^l(x_0)$ (con $x\neq x_0$) $f(x)\in I(l)$

LIMITI IMMEDIATI: $\frac{\text{numero}}{0}=\infty$ $\quad\frac{\text{numero}}{\infty}=0$ $\quad\frac{+\infty^2}{+\infty}=\infty$ $\quad\frac{+\infty}{+\infty^2}=0$ $\quad\frac{\infty}{\infty}$ stesso grado $=\frac{\text{coeff N}}{\text{coeff D}}$ $\quad\frac{0}{\infty}=0$
$\frac{-\infty}{\text{numero}}=-\infty$ $\quad\frac{0}{0}$ si scompone $\quad -\infty+\infty\to\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}$
$\frac{0}{\text{numero}}=0$ $\quad\frac{\infty}{0}=\infty$ $\quad\frac{\infty}{\text{numero}}=\infty$ $\quad\sqrt{+\infty}=+\infty$ $\quad\sqrt{0}=0$ $\quad\sqrt{-\infty}=$ non esiste $\quad(+\infty)^{-\infty}=0^+$ $\quad(0^+)^{+\infty}=0^+$ $\quad(0^+)^{-\infty}=+\infty$
$\log 0^+=-\infty$ $\quad\log+\infty=+\infty$ $\quad e^{-\infty}=0^+$ $\quad e^{+\infty}=+\infty$

ASINTOTO ORIZZONTALE: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=K<\infty\quad K\in\mathbb{R}\quad \boxed{y=K}$
ASINTOTO VERTICALE: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\quad \boxed{x=x_0}$
ASINTOTO OBLIQUO: 1. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ condizione necessaria ma non sufficiente
$y=mx+q$ $\quad$ 2. Devo trovare m: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=m<\infty$ (deve esistere finito e $\neq 0$)
3. Devo trovare q: $\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=[\infty-\infty]=q$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE: se f ammette $\lim_{x\to x_0}$, allora tale limite è unico. Si dimostra per assurdo.

TEOREMA: se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ e $g(x)$ è limitata $x\in I(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$
Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ e $g(x)$ è limitata $x\in I(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)\pm g(x)=\infty$
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO: se $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, l positivo (negativo) $\Rightarrow\exists I(x_0):\forall x\in I(x_0)$ $f(x)$ è positiva (negativa).
I TEOREMA DEL CONFRONTO: se $\exists\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $f(x)>0$ $\ (f(x)<0)\ \forall x\in I(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)=l>0\ (<0)$
TEOREMA DEI 2 CARABINIERI: se $\exists I(x_0):\forall x\in I(x_0)\quad f(x)\leq g(x)\leq h(x)$
se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l\Rightarrow\lim_{x\to x_0} g(x)=l$
FORME INDETERMINATE: $[+\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
esponenziali $[\infty^0]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$

TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE: se f è non decrescente su (a,b), $a\geq-\infty$ $b\leq+\infty$
$\Rightarrow\lim_{x\to a^+} f(x)=e$ (estremo inferiore del codominio di f)
$\lim_{x\to b^-} f(x)=E$ se f è non crescente in $(a,b)\Rightarrow\lim_{x\to a^+} f(x)=E$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)=e$
TEOREMI SULLE OPERAZIONI: se $\exists\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=l_2\Rightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=l_1+l_2$
$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$